КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН
БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

Н.О.Холбеков, Ж.О.Толубаев

ФУНКЦИЯНЫН ПРЕДЕЛИ, ТУУНДУСУ ЖАНА АНЫН КОЛДОНУШТАРЫ БОЮНЧА ӨЗ АЛДЫНЧА ИШТЕРДИН ЖЫЙНАГЫ

(Өз алдынча иштерди аткарууга усулдук көрсөтмөлөр)

СБОРНИК САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПО ПРЕДЕЛУ, ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЮ

(Методическое руководство к выполнению самостоятельных работ)

Бишкек 2014

УДК 56
ББК 93.1
Х 25

БатМУ СГЭИнин окуу усулдук кеңешмесинде талкууланып, басмага сунушталды.

Жооптуу редактору: Толбаев Б. – физика-математика илимдеринин кандидаты, профессор

Н.О.Холбеков, Ж.О.Толубаев
Х 25 **ФУНКЦИЯНЫН ПРЕДЕЛИ, ТУУНДУСУ ЖАНА АНЫН КОЛДОНУШТАРЫ БОЮНЧА ӨЗ АЛДЫНЧА ИШТЕРДИН ЖЫЙНАГЫ,** - Б.: 2014.- 56 бет

ISBN 978-9967-62-005-1

Усулдук колдонмо жогорку окуу жайларынын күндүзгү жана дистанттык бөлүмдөрүндө билим алышкан студенттердин математика боюнча өз алдынча иштөөсүнө сунушталат.

Методическое пособие предназначено для самостоятельной работы студентов по математике, обучающихся на дневной и дистанционных формах обучения.

Х 1845000023-12 УДК 56
ББК 93.1

ISBN 978-9967-62-005-1

К И Р И Ш   С Ө З

Азыркы күндө жогорку окуу жайлардын алдында окутуунун сапатын жогорулатуу жана дүйнөлүк деңгээлдеги жогорку билимдүү, квалификациялуу адис кадрларды даярдоо маселеси турат. Ал үчүн бүгүнкү күндө окутуу процессинде кредиттик системаны колдонуу негизги маселелерден болуп саналат. Кредиттик система боюнча окутуунун негизи болуп, окуу процессинде студенттердин өз алдынча иштөөсүн уюштуруу эсептелет. Өз алдынча иштин өзгөчөлүгү жекече иштөөгө, системалуулукка, үзгүлтүксүздүккө жана жөнөкөйдүн татаалга өтүү мүнөзгө ээ болууга тийиш. Өз алдынча иш окуу ишмердүүлүгүнүн бардык түрүн, студенттердин даярдыктарынын сапатын жана аудиториялык сабактын натыйжалуу өтүлүшүн камтыйт.

Кыргыз Республикасынын мамлекеттик билим берүүнүн стандартынын негизинде бакалавриаттык билим берүү бөлүмүндө, эң негизгиси ар бир адистиктин студенттеринин өз алдынча даярдануусуна окуу планынын 40%дан кем эмес сааты бөлүштүрүлгөн.

Математикадан студентердин өз алдынча иштөөсү үчүн алардын ар бирине тиешелүү мисал-маселерди түзүп чыгуу талап кылынат.

Сунуш кылынуучу усулдук колдонмо ушул милдеттерди чечүүгө жардам берет. Ал өз ичине математикалык анализдин бир аргументтүү функциянын предели, туундусу жана анын колдонуштары, эки аргументтүү функция бөлүмдөрүн камтыйт. Студенттердин өз алдынча иштерин аткарууга жеңил болуусу үчүн колдонмодо негизги түшүнүктөр, формулалар жана ар бир бөлүмгө тиешелүү мисалдардын чыгарылыштары толугу менен берилди. Ал мисалдар жана көнүгүүлөр студенттердин жалпы теориялык билимдерин бекемдөөгө, математикалык маданиятын өстүрүүгө жана математикалык аппаратты ар кандай м аселелерди чыгарууда пайдалануу билгичтиктерин өнүктүрүүгө көмөк берет.

Колдонмо даярдала турган адистиктердин өзгөчөлүктөрүнө жараша математика адистигине жана математик эмес адистиктердин мамлекеттик типтүү программаларынын негизинде түзүлдү.

Усулдук колдонмо жогорку окуу жайларынын бакалавриаттык жана дистанттык бөлүмдөрүндө билим алышкан студенттердин өз алдынча иштөөсү үчүн сунушталат.

§ 1. Функциянын предели.

Пределди табуунун негизги формулалары.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = A.$

2. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\pm \lim\limits_{x\to a} g(x).$

3. $\lim\limits_{x\to a}\left[\alpha f(x)\right] = \alpha \lim\limits_{x\to a} f(x).$

4. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x).$

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0\right]$

№ 1-11. Лопиталдын эрежесин колдонбой, функциялардын пределдерин тапкыла.

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+7x+3}{x^2-2x-15} = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(2x+1)}{(x+3)(x-5)} = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x+1}{x-5} = \dfrac{2\cdot(-3)+1}{-3-5} = \dfrac{-5}{-8} = \dfrac{5}{8}$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-3x)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4} =$

$= \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} x(\sqrt{x+1}+2) = 3(\sqrt{3+1}+2) = 3\cdot 4 = 12.$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-5x+1}{x^2+3x-4} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(4x-1)}{(x-1)(x+4)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x+4} = \dfrac{4\cdot 1-1}{1+4} = \dfrac{3}{5}$

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-4x} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x^2-4x)(\sqrt{x+5}+3)} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+5)-9}{(x^2-4x)(\sqrt{x+5}+3)}$

$= \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \dfrac{1}{4(\sqrt{4+5}+3)} = \dfrac{1}{36}$

5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x-1}{x+2} = \dfrac{3\cdot(-1)-1}{-1+2} = \dfrac{-4}{1} = -4$

6. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)}{(x^2-9)(\sqrt{x+4}+1)} = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+4)-1}{(x^2-9)(\sqrt{x+4}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+4}+1)} = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{1}{(x-3)(\sqrt{x+4}+1)} = \dfrac{1}{(-3-3)(\sqrt{-3+4}+1)} =$

$= \dfrac{1}{-6\cdot 2} = -\dfrac{1}{12}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+3x-10}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-2)(x+5)}=2\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+\frac{1}{2}}{x+5}=2\dfrac{2+\frac{1}{2}}{2+5}=$

$=2\dfrac{\frac{5}{2}}{7}=\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{7}$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(2x+5)-9}=$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{x-2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 2}x\left(\sqrt{2x+5}+3\right)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\left(\sqrt{2\cdot 2+5}+3\right)=3+3=6$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+7}{x^3+2x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^2-3x+7}{x^3}}{\frac{x^3-2x^2-3}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^3}}=\dfrac{0-0+0}{1+0-0}=\dfrac{0}{1}=0$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)(x^2-4)}{(x^2-4)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$

11. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{3x^2-13x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2(x-4)(x-\frac{1}{2})}{3(x-4)(x-\frac{1}{3})}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-1}{3x-1}=\dfrac{2\cdot 4-1}{3\cdot 4-1}=\dfrac{8-1}{12-1}=\dfrac{7}{11}$

Тригонометриялык функциялардын пределдерин табуунун формулалары:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1;$ 3. $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1;$ 4. $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{tgu}{u}=1;$

№1-6. Тригонометриялык функциялардын пределдерин тапкыла.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 3x}{2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{9\sin^2 3x}{9x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\dfrac{9\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{9\cdot 1\cdot 1}{1\cdot 1}=9\cdot 1=9$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{5tg5x}{5x}}{\frac{3\sin 3x}{3x}}=\dfrac{5}{3}\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{5}{3}\dfrac{1}{1}=\dfrac{5}{3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\sin 3x\cdot\sin 3x}{3x\cdot 3x}=\dfrac{9}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=\dfrac{9}{2}\cdot 1\cdot 1=4\dfrac{1}{2}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{1-\cos 6x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos^2 3x+\sin^2 3x-\cos^2 3x+\sin^2 3x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 3x}=$

$=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{3\sin 3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{3\sin 3x}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{9}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{1}{6}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x}{x\sin 2x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{2x\cos x\sin x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 4x+\sin^2 4x-\cos^2 4x+\sin^2 4x}{3x\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 4x}{3x\sin 4x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 4x}{4x}=$
$=\dfrac{8}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=\dfrac{8}{3}\cdot 1=2\dfrac{2}{3}$

Көрсөткүчтүү функциялардын пределдерин табуунун формулалары:

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e;\qquad 2.\ \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{u}}=e;$$

№1-5. Көрсөткүчтүү функциялардын пределдерин тапкыла.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\left(-\dfrac{x}{7}\right)}\right)^{\left(-\frac{x}{7}\right)(-14)}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\left(-\dfrac{x}{7}\right)}\right)^{-\frac{x}{7}}\right]^{-14}=$

$=e^{-14}=\dfrac{1}{e^{14}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{(x+1)}{x}\cdot\frac{1}{(x+1)}}\right]=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{(x+1)}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x(x+1)}}=$

$=e^{0}=1$

3. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{3x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3} = e^{3}$$

4. $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{x}{2}\right)}\right)^{\left(-\frac{x}{2}\right)(-10)} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{x}{2}\right)}\right)^{\left(-\frac{x}{2}\right)}\right]^{-10} =$$

$$= e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}$$

5. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{4x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{x^2}{2}.8} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{x^2}{2}}\right]^{8} = e^{8}$$

§2. Функциянын туундусу.

Туунду алуунун эрежелери.

1. $\left[u(x)+v(x)\right]' = u'(x)+v'(x);$ 2. $\left[u(x)\cdot v(x)\right]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ 4. $\left[f\{\varphi(x)\}\right]' = f'\{\varphi(x)\}\varphi'(x)$

5. $\left[u(x)^{v(x)}\right]' = u(x)^{v(x)}\ln u(x)v'(x)+v(x)\cdot u(x)^{v(x)-1}\cdot u'(x)$

Туундунун таблицасы.

1. $(C)'=0,$ 2. $(x)'=1$

3. $(x^n)'=nx^{n-1}, \quad n\in R, x\in R$

4. $(a^x)'=a^x\ln a,\ a>0,\ a\neq 1,\ x\in R,$

5. $(e^x)'=e^x, x\in R$

6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a},\ a\succ 0, a\neq 0, x\succ 0$

7. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}, \quad x>0,$

8. $(\sin x)'=\cos x, \quad x\in R$

9. $(\cos x)'=-\sin x, \quad x\in R$

10. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in z$

11. $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x\neq\pi n, n\in z$

12. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$

14. $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}\ , \quad |x|\in R$

13. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$

15. $(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}\ , \quad x\in R$

№1-25. Берилген функциялардын туундуларын тапкыла.

1. $y = 3\sqrt[3]{x} - \frac{8}{\sqrt[4]{x}};$

$$y' = \left(3\sqrt[3]{x} - \frac{8}{\sqrt[4]{x}}\right)' = 3\left(\sqrt[3]{x}\right)' - 8\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' = 3\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 8\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{x\sqrt[4]{x}}$$

2. $y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{2} - \frac{3}{x^2};$ $\quad y' = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - \frac{1}{x^2} + \frac{3\cdot 2x}{x^4} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3}$

3. $y = 2^x \cdot x^2;$

$$y' = \left(2^x \cdot x^2\right)' = \left(2^x\right)' \cdot x^2 + 2^x \cdot \left(x^2\right)' = 2^x \ln 2 \cdot x^2 + 2^x \cdot 2x =$$

$$= 2^x \cdot x^2 \cdot \ln 2 + 2^{x+1} \cdot x = 2^x \cdot x(x\ln 2 + 2)$$

4. $y = \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} + 2x;$ $\quad y' = \left(\sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{x^2} + 2x\right)' = \left(\left(\sqrt[4]{x^3}\right)' + 5\left(\frac{1}{x^2}\right)' + 2\cdot(x)'\right) = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \frac{10}{x^3} + 2$

5. $y = x^5 + \frac{1}{x} - 2\sqrt{x};$ $\quad y' = \left(x^5\right)' + \left(\frac{1}{x}\right)' - 2\left(\sqrt{x}\right)' = 5x^4 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{2\sqrt{x}} = 5x^4 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

6. $y = \frac{x^3}{3} + 3x - 6\sqrt{x}; y' = (\frac{x^3}{3} + 3x - 6\sqrt{x})' = \frac{1}{3}(x^3)' + 3(x)' - 6(\sqrt{x})' =$

$$= \frac{3}{3}x^{3-1} + 3\cdot 1 - 6\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 3$$

7. $y = 2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 3x;$ $\quad y' = 2\left(\sqrt{x}\right)' - 3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' + 3(x)' = 2\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

8. $y = \frac{\sqrt[3]{x} - x}{1 - \sqrt{x}};$

$$y' = \frac{\left(\sqrt[3]{x} - x\right)'\left(1 - \sqrt{x}\right) - \left(\sqrt[3]{x} - x\right)\left(1 - \sqrt{x}\right)'}{\left(1 - \sqrt{x}\right)^2} = \frac{\left[\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' - 1\right]\left(1 - \sqrt{x}\right) - \left(\sqrt[3]{x} - x\right)\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(1 - \sqrt{x}\right)^2} =$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-1\right)\left(1-\sqrt{x}\right)+\frac{\sqrt[3]{x}-x}{2\sqrt{x}}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\left(\frac{1-3\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)+\frac{\sqrt[3]{x}-x}{2\sqrt{x}}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{x}\left(1-3\sqrt[3]{x^2}\right)\left(1-\sqrt{x}\right)+\left(\sqrt[3]{x}-x\right)}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$$

9. $x\cdot y^2+x^2\cdot y=2;\quad y^2+2xyy'+x^2y'+2xy=0;\quad y'\left(2xy+x^2\right)=-y^2-2xy;\quad y'=-\frac{y^2+2xy}{x^2+2xy}$

10. $y=\ln^5 x\cdot\sin 5x;$

$$y'=\left(y=\ln^5 x\cdot\sin 5x\right)'=(\ln^5 x)'\cdot\sin 5x+\ln^5 x\cdot(\sin 5x)'=5\ln^4 x\cdot\frac{1}{x}\cdot\sin 5x+5\ln^5 x\cdot\cos 5x$$

11. $y=\arccos e^x;\quad y'=\left(\arccos e^x\right)'=\frac{-1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot e^x=-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

12. $y=\arcsin\sqrt{2x}\;;\quad y'=\left(arc\sin\sqrt{2x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1-2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x(1-2x)}}$

13. $y=e^{\sin 3x}\cdot\cos 5x;$

$$y'=\left(e^{\sin 3x}\cdot\cos 5x\right)'=\left(e^{\sin 3x}\right)'\cdot\cos 5x+e^{\sin 3x}\cdot\left(\cos 5x\right)'=3\cos 3x\cdot e^{\sin 3x}\cdot\cos 5x+$$

$$+5\left(-\sin 5x\right)e^{\sin 3x}=e^{\sin 3x}\left(3\cos 3x\cdot\cos 5x-5\sin 5x\right)$$

14. $y=e^{-x}\cos 2x;$

$$y'=\left(e^{-x}\cos 2x\right)'=\left(e^{-x}\right)'\cos 2x+e^{-x}\left(\cos 2x\right)'=-e^{-x}\cos 2x-e^{-x}\sin 2x\cdot 2=-e^{-x}\left(\cos 2x+2\sin 2x\right)$$

15. $y=\sqrt{7+\ln^2 x};\quad y'=\left(\sqrt{7+\ln^2 x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{7+\ln^2 x}}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{x\sqrt{7+\ln^2 x}}$

16. $y=\arcsin e^{3x};\quad y'=\left(\arcsin e^{3x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-e^{6x}}}\cdot 3e^{3x}=\frac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$

17. $y=10^{x\cdot tgx};\quad y'=(10^{x\cdot tgx})'=10^{xtgx}\cdot\ln 10\cdot(x'\cdot tgx+x\cdot tg'x)=10^{xtgx}\cdot\ln 10(tgx+\frac{x}{\cos^2 x})$

18. $y=\sqrt{\ln\sin x};\quad y'=(\sqrt{\ln\sin x})'=\frac{1}{2\sqrt{\ln\sin x}}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\frac{ctgx}{2\sqrt{\ln\sin x}}$

19. $y=arctg^2\frac{1}{x};\quad y'=(arctg^2\frac{1}{x})'=2arctg\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{1}{x^2})=-\frac{2}{x^2+1}arctg\frac{1}{x}$

20. $y=(3-x)tg2x; \quad y'=[(3-x)tg2x]'=(3-x)'tg2x+(3-x)(tg2x)'=$

$=(-1)tg2x+(3-x)\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2=\frac{2(3-x)}{\cos^2 2x}-tg2x$

21. $y=\ln\sqrt{1+x^2}; \quad y'=\left(\ln\sqrt{1+x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\frac{x}{1+x^2}$

22. $y=arctg\sqrt{x}; \quad y'=\left(arctg\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

23. $y=\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right); \quad y'=\left(\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{4+x^2}}\cdot\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)'=$

$=\frac{1}{x+\sqrt{4+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}}\right)=\frac{\sqrt{4+x^2}+x}{\sqrt{4+x^2}\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$

24. $y=arctg^3(2x-1); \quad y'=\left(arctg^3(2x-1)\right)'=3arctg^2(2x-1)\cdot\left(arctg(2x-1)\right)'\cdot(2x)'=$

$=3arctg^2(2x-1)\frac{1}{1+(2x-1)^2}\cdot 2=\frac{6arctg^2(2x-1)}{1+(2x-1)^2}$

25. $y=\ln\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right); \quad y'=\left[\ln(2x-3\sqrt{1-4x^2}\ )\right]'=\frac{1}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}\cdot\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)'=$

$=\frac{1}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}\left(2-\frac{3\cdot(-8x)}{2\sqrt{1-4x^2}}\right)=\frac{1}{\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{1-4x^2}+12x}{\sqrt{1-4x^2}}=\frac{\sqrt{1-4x^2}+12x}{\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)\sqrt{1-4x^2}}$

§3. Функцияны толук изилдөө.

№ 1. Диффренциалдык эсептөөлөрдүн жардамында $y = F(x)$ функциясын толук изилдегиле жана графигин тургузгула.

$$F(x) = x^3 - 2{,}5x^2 - 2x + 1{,}5$$

1. Берилген функция сызыктуу болгондуктан анын аныкталуу областы

   $D(y) = \left]-\infty; \infty\right[$ болот.

2. Берилген функция жуптукка жана тактыкка аныкталбайт.

$$f(-x) \neq -f(x) \qquad\qquad f(-x) \neq f(x)$$

3. Функция үзүлүү чекитке ээ эмес. Функция мезгилдүү эмес.

4. Функциянын графиги асимптоталарга ээ эмес.

$$y = \kappa x + b; \qquad k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \infty; \qquad b = \infty.$$

5. Координаттык октор менен кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$$x = 0 \quad \textit{болгондо} \quad y = 1{,}5$$

$$y = 0 \quad \textit{болгондо} \qquad x^3 - 2{,}5x^2 - 2x + 1{,}5 = 0$$

$$(x - 0{,}5)(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$x_1 = 0, \qquad x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{2 \pm 4}{2}; \quad x_2 = 3; \; x_3 = -1;$$

Координаттык октор менен болгон кесилиш чекиттери:

$$M_1(0; 1{,}5); \; M_2(-1; 0); \; M_3(0; 0); \quad M_4(3; 0)$$

6. Функциянын критикалык чекиттерин аныктайбыз:

$$F'(x) = 0 \qquad F'(x) = 3x^2 - 5x - 2$$

$3x^2-5x-2=0$ $\qquad x\in\left]-\infty;\ -\frac{1}{3}\right[$ $\qquad f'(x)<0$ – *функция осуучу болот*

$D=25+24=49$ $\qquad x\in\left]-\frac{1}{3};\ 2\right[$ $\qquad f'(x)>0$ – *функция кемуучу болот*

$x_{1,2}=\frac{5\pm 7}{6}$ $\qquad x\in\left]2;\ +\infty\right[$ $\qquad f'(x)<0$ – *функция осуучу болот*

$x_1=2 \qquad x_2=-\frac{1}{3}$

$M_5\left(-\frac{1}{3};\ 1{,}9\right)$ – *функциянын максимуму;*

$M_6(2;\ -5{,}5)$ – *функциянын минимуму;*

7. Функциянын ийилүү чекиттерин табабыз:

$$F''(x)=0 \qquad F''(x)=6x-5$$
$$6x-5=0$$
$$6x=5$$
$$x=0{,}8$$

$x\in\left]-\infty;\ 0{,}8\right[$ $\qquad f''(x)<0$ $\qquad$ *график томпок;*

$x\in\left]0{,}8;\ +\infty\right[$ $\qquad f''(x)>0$ $\qquad$ *график иймек;*

Ийилүү чекити $\quad M_7(0{,}8;\ -1{,}19)$

№ 2. Диффренциалдык эсептөөлөрдүн жардамында $y=F(x)$ функциясын толук изилдегиле жана графигин тургузгула.

$$F(x)=\frac{1}{3}\left(x^3-14x^2+49x-36\right)$$

1. Берилген функция сызыктуу болгондуктан анын аныкталуу областы

$$D(y)=\left]-\infty;\infty\right[\ \text{болот.}$$

2. Берилген функция жуптукка жана тактыкка аныкталбайт.

$$f(-x)\neq -f(x) \quad и \quad f(-x)=f(x)$$

3. Функция үзүлүү чекитке ээ эмес. Функция мезгилдүү эмес.

4. Функциянын графиги асимптоталарга ээ эмес.

$$y=kx+b; \qquad k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty; \qquad b=\infty$$

5. Координаттык октор менен кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$x=0$ *болгондо* $y=-12$

$y=0$ *болгондо* $\frac{1}{3}\left(x^3-14x^2+49x-36\right)=0$

$$x^3-14x^2+49x-36=0$$

$$(x-1)\left(x^2-13x+36\right)=0$$

$$x^2-13x+36=0$$

$$x_1=1;\ x_2=4;\ x_3=9.$$

Координаттык октор менен болгон кесилиш

чекиттери: $M_1(1;0)$; $M_2(4;0)$; $M_3(9;0)$; $M_4(0;-12)$

6. Функциянын критикалык чекиттерин аныктайбыз

$F'(x)=0$ $\quad F'(x)=\frac{1}{3}\left(3x^2-28x+49\right)$

$$\frac{1}{3}\left(3x^2-28x+49\right)=0$$

$$3x^2-28x+49=0$$

$$x_{1,2}=\frac{28\pm 14}{6}$$

$$x_1=\frac{7}{3};\quad x_2=7$$

$x\in \left]-\infty;\ \frac{7}{3}\right[$ $\quad f'(x)>0-$ *функция осуучу болот*;

$x\in \left]\frac{7}{3};\ 7\right[$ $\quad f'(x)<0-$ *функция кемуучу болот*;

$x\in \left]7;\ +\infty\right[$ $\quad f'(x)>0-$ *функция осуучу болот*;

$M_5\left(\frac{7}{3};\ 14\frac{22}{27}\right)-$ *функциянын максимум чекити*;

$M_6(7;\ -12)-$ *функциянын минимум чекити*;

7. Функциянын ийилүү чекиттерин табабыз

$F''(x)=0$ $\quad F''(x)=\frac{1}{3}(6x-28)$

$$\frac{1}{3}(6x-28)=0$$

$$6x-28=0$$

$$6x=28$$

$$x=\frac{14}{3}$$

$$x=4\frac{2}{3}$$

$$x \in \left]-\infty;\ 4\frac{2}{3}\right[\qquad f''(x) < 0 \qquad \textit{график томпок};$$

$$x \in \left]4\frac{2}{3};\ +\infty\right[\qquad f''(x) > 0 \qquad \textit{график иймек};$$

Ийилүү чекити $M_7\left(4\frac{2}{3};\ -10\frac{16}{27}\right)$

№ 3. Диффренциалдык эсептөөлөрдүн жардамында $y = F(x)$ функциясын толук изилдегиле жана графигин тургузгула.

$$F(x) = x^3 - 9{,}5x^2 + 26x - 17{,}5$$

1. Берилген функция сызыктуу болгондуктан анын аныкталуу областы

$$D(y) = \left]-\infty;\infty\right[\text{ болот.}$$

2. Берилген функция жуптукка жана тактыкка аныкталбайт.

$$f(-x) \neq -f(x); \qquad f(-x) \neq f(x)$$

3. Функция үзүлүү чекитке ээ эмес. Функция мезгилдүү эмес.

4. Функциянын графиги асимптоталарга ээ эмес.

$$y = kx + b \qquad k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty; \qquad b = \infty$$

5. Координаттык октор менен кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$$x = 0 \quad \textit{болгондо} \quad y = -17{,}5.$$

$$y = 0; \ \textit{болгондо} \quad x^3 - 9{,}5x^2 + 26x - 17{,}5 = 0$$
$$(x-1)(x^2 - 8{,}5x + 17{,}5) = 0$$
$$x^2 - 8{,}5x + 17{,}5 = 0$$
$$x_{2,3} = \frac{8{,}5 \pm 1{,}5}{2}$$
$$x_1 = 1;\ x_2 = 3{,}5;\ x_3 = 5$$

Координаттык октор менен болгон кесилиш чекиттери:

$$M_1(0;-17{,}5);\ M_2(1;0);\ M_3(3{,}5;0)\ M_4(5;0)$$

6. Функциянын критикалык чекиттерин аныктайбыз

$F'(x)=0 \qquad F'(x)=3x^2-18x+26$

$$3x^2-19x+26=0$$

$$x_{1,2}=\frac{19\pm 7}{6}$$

$$x_1=4\frac{1}{3}; \quad x_2=2$$

$x\in\left]-\infty;2\right[\quad f'(x)>0$ *функция осуучу болот;*

$x\in\left]2;4\frac{1}{3}\right[\quad f'(x)<0$ *функция кемуучу болот;*

$x\in\left]4\frac{1}{3};+\infty\right[\quad f'(x)>0$ *функция осуучу болот;*

$M_5(2;\ 4{,}5)-$ *функциянын максимум чекити;*

$M_6\left(4{,}5;\ -1\frac{23}{27}\right)-$ *функциянын минимум чекити;*

7. Функциянын ийилүү чекиттерин табабыз $F''(x)=0$

$F''(x)=0; \quad F''(x)=6x-18$

$$6x-18=0$$

$$6x=18$$

$$x=3$$

$x\in\left]-\infty;3\right[\quad f''(x)<0$ *график томпок;*

$x\in\left]3;+\infty\right[\quad f''(x)>0$ *график иймек;*

$M_7(3;2)-$ *функциянын ийилуу чекити.*

№4. Диффренциалдык эсептөөлөрдүн жардамында $y=F(x)$ функциясын толук изилдегиле жана графигин тургузгула.

$$F(x)=x^3-8{,}5x^2+20x-12{,}5$$

1. Берилген функция сызыктуу болгондуктан анын аныкталуу областы

   $D(y)=\left]-\infty;\infty\right[$ болот.

2. Берилген функция жуптукка жана тактыкка аныкталбайт.

3. Функция үзүлүү чекитке ээ эмес. Функция мезгилдүү эмес.
4. Функциянын графиги асимптоталарга ээ эмес.
5. Координаттык октор менен кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

   $x=0$ *болгондо* $y=-12{,}5.$

$y = 0$ *болгондо* $\quad x^3 - 8{,}5x^2 + 20x - 12{,}5 = 0$

$$(x-1)(x^2 - 7{,}5x + 12{,}5) = 0$$

$$x^2 - 7{,}5x + 12{,}5 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{7{,}5 \pm 2{,}5}{2}$$

$$x_1 = 1;\ \ x_2 = 2{,}5;\ \ x_3 = 5$$

Координаттык октор менен болгон кесилиш чекиттери:

$$M_1(0;-12{,}5);\ M_2(1;0);\ M_3(2{,}5;0)\ M_4(5;0)$$

6. Функциянын критикалык чекиттерин аныктайбыз

$$F'(x) = 0 \qquad F'(x) = 3x^2 - 17x + 20$$

$$3x^2 - 17x + 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = 4;\ \ x_2 = 1\frac{2}{3}$$

$x \in \left]-\infty; 1\frac{2}{3}\right[\qquad f'(x) > 0$ *функция осуучу болот*;

$x \in \left]1\frac{2}{3};\ 4\right[\qquad f'(x) < 0$ *функция кемуучу болот*;

$x \in \left]4;\ +\infty\right[\qquad f'(x) > 0$ *функция осуучу болот*;

$M_5\left(1\frac{2}{3}; 1\frac{23}{27}\right) -$ *функциянын максимум чекити*;

$M_6(4; -4{,}5) -$ *функциянын минимум чекити*;

7. Функциянын ийилүү чекиттерин табабыз $F''(x) = 0$

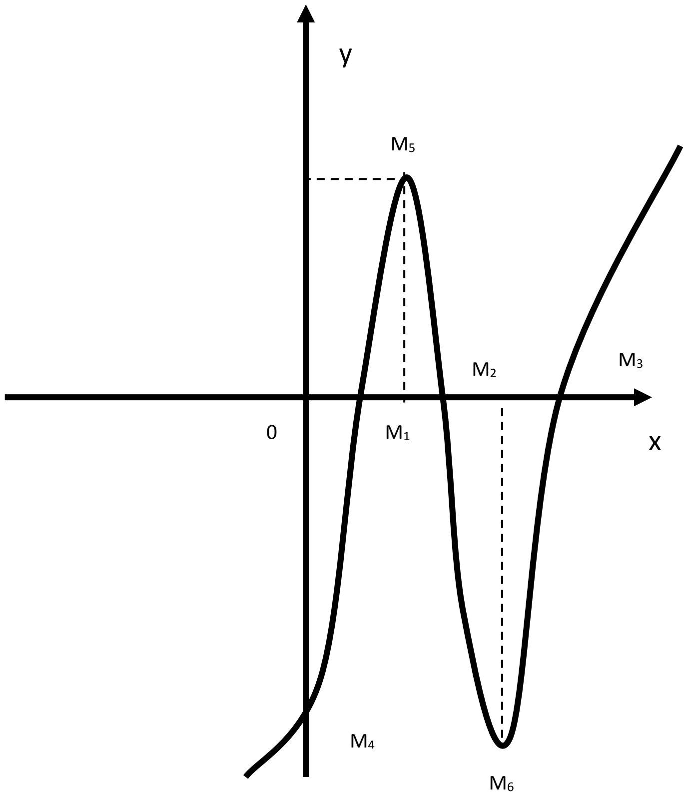
$$F''(x) = 0;\quad F''(x) = 6x - 17;\quad 6x - 17 = 0;\qquad 6x = 17;\qquad x = 2\frac{5}{6}.$$

$x \in \left]-\infty; 2\frac{5}{6}\right[\qquad f''(x) < 0$ *график томпок*;

$x \in \left]2\frac{5}{6}; +\infty\right[\qquad f''(x) > 0$ *график иймек*;

$M_7\left(2\frac{5}{6}; -1\frac{35}{108}\right) -$ *функциянын ийилуу чекити.*

8. Берилген функциянын графиги:



№5. Диффренциалдык эсептөөлөрдүн жардамында $y = F(x)$ функциясын толук изилдегиле жана графигин тургузгула.

$$F(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

1. Берилген функция сызыктуу болгондуктан анын аныкталуу областы

   $D(y) =]-\infty; \infty[$ болот.

2. Функция үзүлүү чекитке ээ эмес. Функция мезгилдүү эмес.
3. $F(-x) = ((-x)^2 - 1)((-x)^2 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = F(x)$ болгондуктан функция жуп болот.

4. Функциянын графигинин асимптоталарын изилдейбиз.

$$x = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left[x^3 - \frac{1}{x}\right] = \infty$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[(x^2 - 1)(x^2 + 1) - k \cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}(x^4 - 1 - kx) = \infty$$

   болгондуктан функциянын графиги асимптоталарга ээ эмес.

5. Координаттык октор менен кесилиш чекиттерин аныктайбыз.

$x = 0$ *болгондо* $y = -1.$

$y = 0$ *болгондо* $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Координаттык октор менен болгон кесилиш чекиттери:

$M_1(0;-1);\ M_2(-1;0);\ M_3(1;0)$

6. Функциянын критикалык чекиттерин аныктайбыз

$F'(x) = 0 \qquad F'(x) = \left[(x^2-1)(x^2+1)\right]'$

$4x^3 = 0$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$x \in \left]-\infty;\ 0\right[\quad f'(x) < 0$ *функция кемуучу болот*;
$x \in \left]0;\ +\infty\right[\quad f'(x) > 0$ *функция осуучу болот*;
$M_4(\ 0;\ -1) -$ *функциянын минимум чекити*;

X	$\left]-\infty;0\right[$	0	$\left]0;+\infty\right[$
Y'	-	0	+
Y	↘	-1 min	↗

7. Функциянын ийилүү чекиттерин табабыз $F''(x) = 0$

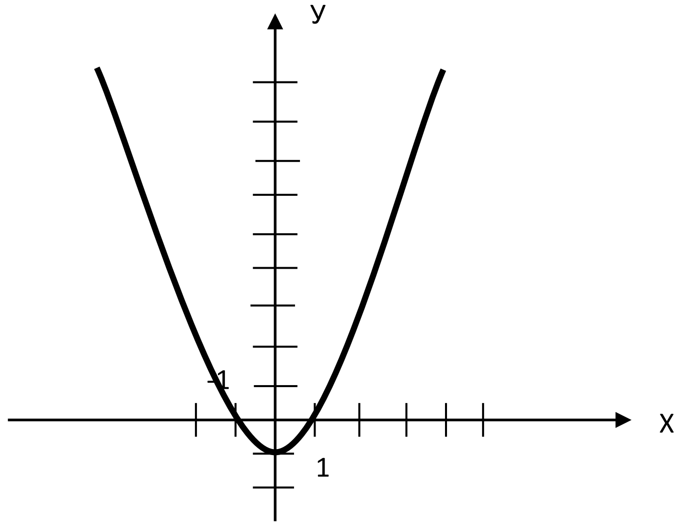
$F''(x) = 0; \quad F''(x) = 12x^2$

$12x^2 = 0$

$x_1 = x_2 = 0$

$x \in \left]-\infty;\ 0\right[\quad f''(x) < 0$ *график томпок*;
$x \in \left]0;+\infty\right[\quad f''(x) > 0$ *график иймек*;
$M_7(0;-1) -$ *функциянын ийилуу чекити.*

8. Берилген функциянын графиги:



§4. Эки аргументтүү функциянын толук дифференциалы.

$z = f(x;y)$ ***функциясынын толук дифференциалын табуунун формуласы.***

$$dz = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}dy$$

№1. $z = \sin^3(2x+3y)$

$$dz = 6\sin^2(2x+3y)\cos(2x+3y)dx + 9\sin^2(2x+3y)\cos(2x+3y)\cos(2x+3y)dy;$$

№2. $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

$$dz = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}dy = \frac{xdx}{x^2+y^2} + \frac{ydy}{x^2+y^2} = \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2};$$

№3. $z = arctg\ \dfrac{x}{y}$; $\quad dz = \dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\dfrac{1}{y}dx + \dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\cdot\dfrac{-x}{y^2}dy = \dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2};$

№4. $z = \sqrt{x^2y+3xy^2}$; $\quad dz = \dfrac{2xy+y^2}{2\sqrt{x^2y+3xy^2}}dx + \dfrac{x^2+6xy}{2\sqrt{x^2y+3xy^2}}dy;$

№5. $z = tg^2(2x-y)$; $\quad dz = \dfrac{4tg(2x-y)}{\cos^2(2x-y)}dx - \dfrac{2tg(2x-y)}{\cos^2(2x-y)}dy = \dfrac{tg(2x-y)}{\cos^2(2x-y)}(4dx-2dy);$

№6. $z = 4\ln ctg(\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{2})$

$$dz = \frac{4}{ctg(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})}\cdot\frac{-1}{\sin^2(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})}\cdot\frac{1}{4}dx + \frac{4}{ctg(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})}\frac{-1}{\sin^2(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})}\cdot(-\frac{1}{2})dy =$$

$$= \frac{2dy}{\cos(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})\sin(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})} - \frac{dx}{\cos(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})\sin(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})} = \frac{2}{\cos\left(\frac{x}{2}-y\right)}(2dy-dx);$$

№7. $z = (\sin x)^{\cos y}$

$$dz = \cos y \sin x^{\cos y-1}\cos xdx + \sin x^{\cos y}\ln\sin x(-\sin y)dy =$$

$$= \cos y(\sin x)^{\cos y-1}\cos x\,dx - \sin x^{\cos y}\sin y\ln\sin x\,dy;$$

№8. $z = \ln(xy^3+x^2y)$

$$dz = \frac{1}{xy^3+x^2y}\cdot(y^3+2xy)dx + \frac{1}{xy^3+x^2y}\cdot(3xy^2+x^2)dy =$$

$$= \frac{1}{xy^3+x^2y}\left[(y^3+2xy)dx + (3xy^2+x^2)dy\right];$$

№9. $z = ctg(xy^2 + 4y)$

$$dz = \frac{-1}{\sin^2(xy^2+4y)}\, y^2 dx - \frac{1}{\sin^2(xy^2+4y)}(2xy+4)\, dy =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2(xy^2+4y)}\left[y^2 dx + (2xy+4)dy\right];$$

№10. $z = \sin(5x^2 - 3y^2)$

$$dz = \cos(5x^2 - 3y^2)\cdot 10x dx - \cos(5x^2-3y^2)\cdot 6y dx = 2\cos(5x^2-3y^2)[5xdx - 3ydy];$$

§1.1. Пределы функций.

Формулы для вычисления пределов функций:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = A.$

2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x).$

3. $\lim\limits_{x\to a}[\alpha f(x)] = \alpha \lim\limits_{x\to a} f(x).$

4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x).$

5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \left[\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0\right]$

№ 1-11. Найти пределы функции, не пользуясь правилом Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+7x+3}{x^2-2x-15} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x+3)(2x+1)}{(x+3)(x-5)} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x+1}{x-5} = \dfrac{2\cdot(-3)+1}{-3-5} = \dfrac{-5}{-8} = \dfrac{5}{8}$

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x^2-3x)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4} =$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} x(\sqrt{x+1}+2) = 3(\sqrt{3+1}+2) = 3\cdot 4 = 12.$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^2-5x+1}{x^2+3x-4} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(4x-1)}{(x-1)(x+4)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x-1}{x+4} = \dfrac{4\cdot 1-1}{1+4} = \dfrac{3}{5}$

4. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-4x} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x^2-4x)(\sqrt{x+5}+3)} = \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{(x+5)-9}{(x^2-4x)(\sqrt{x+5}+3)}$

$= \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \dfrac{1}{4(\sqrt{4+5}+3)} = \dfrac{1}{36}$

5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x-1}{x+2} = \dfrac{3\cdot(-1)-1}{-1+2} = \dfrac{-4}{1} = -4$

6. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x+4}-1}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(\sqrt{x+4}-1)(\sqrt{x+4}+1)}{(x^2-9)(\sqrt{x+4}+1)} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x+4)-1}{(x^2-9)(\sqrt{x+4}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+4}+1)} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{1}{(x-3)(\sqrt{x+4}+1)} = \dfrac{1}{(-3-3)(\sqrt{-3+4}+1)} =$

$= \dfrac{1}{-6\cdot 2} = -\dfrac{1}{12}$

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2+3x-10}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-2)(x+5)}=2\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+\frac{1}{2}}{x+5}=2\dfrac{2+\frac{1}{2}}{2+5}=$

$=2\dfrac{\frac{5}{2}}{7}=\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{7}$

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{(2x+5)-9}=$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x(x-2)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{x-2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 2}x\left(\sqrt{2x+5}+3\right)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\left(\sqrt{2\cdot 2+5}+3\right)=3+3=6$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+7}{x^3+2x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2x^2-3x+7}{x^3}}{\frac{x^3-2x^2-3}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^3}}=\dfrac{0-0+0}{1+0-0}=\dfrac{0}{1}=0$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-2)(x^2-4)}{(x^2-4)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}$

11. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{3x^2-13x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2(x-4)(x-\frac{1}{2})}{3(x-4)(x-\frac{1}{3})}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x-1}{3x-1}=\dfrac{2\cdot 4-1}{3\cdot 4-1}=\dfrac{8-1}{12-1}=\dfrac{7}{11}$

Формулы для вычисления пределов тригонометрических функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1;$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1;$ 3. $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1;$ 4. $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{tgu}{u}=1;$

№1-6. Найти пределы тригонометрических функций.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 3x}{2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{9\sin^2 3x}{9x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}=\dfrac{9\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\dfrac{9\cdot 1\cdot 1}{1\cdot 1}=9\cdot 1=9$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{5tg5x}{5x}}{\frac{3\sin 3x}{3x}}=\dfrac{5}{3}\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}=\dfrac{5}{3}\dfrac{1}{1}=\dfrac{5}{3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 3x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\sin 3x\cdot\sin 3x}{3x\cdot 3x}=\dfrac{9}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=\dfrac{9}{2}\cdot 1\cdot 1=4\dfrac{1}{2}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{1-\cos 6x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos^2 3x+\sin^2 3x-\cos^2 3x+\sin^2 3x}=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 3x}=$

$=\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{3\sin 3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{3\sin 3x}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{9}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{1}{6}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x}{x\sin 2x}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{2x\cos x\sin x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 4x+\sin^2 4x-\cos^2 4x+\sin^2 4x}{3x\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 4x}{3x\sin 4x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 4x}{4x}=$

$=\dfrac{8}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=\dfrac{8}{3}\cdot 1=2\dfrac{2}{3}$

Формулы для вычисления пределов показательных функций:

$$1.\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e; \qquad 2.\ \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{u}}=e;$$

№1-5. Найти пределы показательных функций.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\left(-\dfrac{x}{7}\right)}\right)^{\left(-\frac{x}{7}\right)(-14)}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\left(-\dfrac{x}{7}\right)}\right)^{-\frac{x}{7}}\right]^{-14}=$

$=e^{-14}=\dfrac{1}{e^{14}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{(x+1)}{x}\cdot\frac{1}{(x+1)}}\right]=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{(x+1)}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x(x+1)}}=$

$=e^0=1$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{9}{3x}\right)^{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3} = e^{3}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{5x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{x}{2}\right)}\right)^{\left(-\frac{x}{2}\right)(-10)} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(-\frac{x}{2}\right)}\right)^{\left(-\frac{x}{2}\right)}\right]^{-10} =$

$= e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{4x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{x^2}{2}.8} = \left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2}{2}}\right)^{\frac{x^2}{2}}\right]^{8} = e^{8}$

§2.1. Производные функций.

Способы нахождении производных.

1. $\left[u(x)+v(x)\right]' = u'(x)+v'(x);$ 2. $\left[u(x)\cdot v(x)\right]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

3. $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]' = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ 4. $\left[f\{\varphi(x)\}\right]' = f'\{\varphi(x)\}\varphi'(x)$

5. $\left[u(x)^{v(x)}\right]' = u(x)^{v(x)}\ln u(x)v'(x)+v(x)\cdot u(x)^{v(x)-1}\cdot u'(x)$

Таблица производных функций:

1. $(C)'=0,$ 2. $(x)'=1$

3. $(x^n)'=nx^{n-1}, \quad n\in R, x\in R$

4. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a,\ a>0,\ a\neq 1,\ x\in R,$

5. $(e^x)'=e^x, x\in R$

6. $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a},\ a\succ 0, a\neq 0, x\succ 0$

7. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}, \quad x>0,$

8. $(\sin x)'=\cos x, \quad x\in R$

9. $(\cos x)'=-\sin x, \quad x\in R$

10. $(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in z$

11. $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x\neq\pi n, n\in z$

12. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$

13. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x|<1$

14. $(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}\ , \quad |x|\in R$

15. $(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}\ , \quad x\in R$

№1-25. Найти производные заданных функций.

1. $y = 3\sqrt[3]{x} - \dfrac{8}{\sqrt[4]{x}}$;

$$y' = \left(3\sqrt[3]{x} - \frac{8}{\sqrt[4]{x}}\right)' = 3\left(\sqrt[3]{x}\right)' - 8\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)' = 3\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 8\left(-\frac{1}{4}\right)x^{-\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{x\sqrt[4]{x}}$$

2. $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{x^2}$; $\quad y' = \left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2}\right)' = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{6}{x^3}$

3. $y = 2^x \cdot x^2$;

$$y' = \left(2^x \cdot x^2\right)' = \left(2^x\right)' \cdot x^2 + 2^x \cdot \left(x^2\right)' = 2^x \ln 2 \cdot x^2 + 2^x \cdot 2x == 2^x \cdot x^2 \cdot \ln 2 + 2^{x+1} \cdot x =$$

$$= 2^x \cdot x(x\ln 2 + 2)$$

4. $y = \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{5}{x^2} + 2x$; $\quad y' = \left(\sqrt[4]{x^3} + \dfrac{5}{x^2} + 2x\right)' = \left(\left(\sqrt[4]{x^3}\right)' + 5\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' + 2\cdot(x)'\right) = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \dfrac{10}{x^3} + 2$

5. $y = x^5 + \dfrac{1}{x} - 2\sqrt{x}$; $\qquad y' = \left(x^5\right)' + \left(\dfrac{1}{x}\right)' - 2\left(\sqrt{x}\right)' = 5x^4 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{2\sqrt{x}} = 5x^4 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

6. $y = \dfrac{x^3}{3} + 3x - 6\sqrt{x}; y' = (\dfrac{x^3}{3} + 3x - 6\sqrt{x})' = \dfrac{1}{3}(x^3)' + 3(x)' - 6(\sqrt{x})' = \dfrac{3}{3}x^{3-1} + 3\cdot 1 - 6\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} =$

$$= x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 3$$

7. $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + 3x$; $\quad y' = 2\left(\sqrt{x}\right)' - 3\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' + 3(x)' = 2\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 3\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3 = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

8. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - x}{1 - \sqrt{x}}$; $y' = \dfrac{\left(\sqrt[3]{x} - x\right)'\left(1 - \sqrt{x}\right) - \left(\sqrt[3]{x} - x\right)\left(1 - \sqrt{x}\right)'}{\left(1 - \sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{\left[\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' - 1\right]\left(1 - \sqrt{x}\right) - \left(\sqrt[3]{x} - x\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(1 - \sqrt{x}\right)^2} =$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1\right)\left(1 - \sqrt{x}\right) + \dfrac{\sqrt[3]{x} - x}{2\sqrt{x}}}{\left(1 - \sqrt{x}\right)^2} = \frac{\left(\dfrac{1 - 3\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\left(1 - \sqrt{x}\right) + \dfrac{\sqrt[3]{x} - x}{2\sqrt{x}}}{\left(1 - \sqrt{x}\right)^2} = \frac{2\sqrt{x}\left(1 - 3\sqrt[3]{x^2}\right)\left(1 - \sqrt{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x} - x\right)}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}\left(1 - \sqrt{x}\right)^2}$$

9. $x \cdot y^2 + x^2 \cdot y = 2$; $\quad y^2 + 2xyy' + x^2 y' + 2xy = 0$; $\quad y'\left(2xy + x^2\right) = -y^2 - 2xy$; $\quad y' = -\dfrac{y^2 + 2xy}{x^2 + 2xy}$

10. $y=\ln^5 x\cdot\sin 5x;\quad y'=\left(y=\ln^5 x\cdot\sin 5x\right)'=(\ln^5 x)'\cdot\sin 5x+\ln^5 x\cdot(\sin 5x)'=$

$=5\ln^4 x\cdot\frac{1}{x}\cdot\sin 5x+5\ln^5 x\cdot\cos 5x$

11. $y=\arccos e^{x};\qquad y'=\left(\arccos e^{x}\right)'=\frac{-1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot e^{x}=-\frac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

12. $y=\arcsin\sqrt{2x}\ ;\quad y'=\left(arc\sin\sqrt{2x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1-2x}}=\frac{1}{\sqrt{2x(1-2x)}}$

13. $y=e^{\sin 3x}\cdot\cos 5x;$

$y'=\left(e^{\sin 3x}\cdot\cos 5x\right)'=\left(e^{\sin 3x}\right)'\cdot\cos 5x+e^{\sin 3x}\cdot(\cos 5x)'=3\cos 3x\cdot e^{\sin 3x}\cdot\cos 5x+$

$+5(-\sin 5x)e^{\sin 3x}=e^{\sin 3x}(3\cos 3x\cdot\cos 5x-5\sin 5x)$

14. $y=e^{-x}\cos 2x;$

$y'=\left(e^{-x}\cos 2x\right)'=\left(e^{-x}\right)'\cos 2x+e^{-x}(\cos 2x)'=-e^{-x}\cos 2x-e^{-x}\sin 2x\cdot 2=-e^{-x}(\cos 2x+2\sin 2x)$

15. $y=\sqrt{7+\ln^2 x};\quad y'=\left(\sqrt{7+\ln^2 x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{7+\ln^2 x}}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{x\sqrt{7+\ln^2 x}}$

16. $y=\arcsin e^{3x};\qquad y'=\left(\arcsin e^{3x}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-e^{6x}}}\cdot 3e^{3x}=\frac{3e^{3x}}{\sqrt{1-e^{6x}}}$

17. $y=10^{x\cdot tgx};\qquad y'=(10^{x\cdot tgx})'=10^{xtgx}\cdot\ln 10\cdot(x'\cdot tgx+x\cdot tg'x)=10^{xtgx}\cdot\ln 10(tgx+\frac{x}{\cos^2 x})$

18. $y=\sqrt{\ln\sin x};\qquad y'=(\sqrt{\ln\sin x})'=\frac{1}{2\sqrt{\ln\sin x}}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\frac{ctgx}{2\sqrt{\ln\sin x}}$

19. $y=arctg^2\frac{1}{x};\quad y'=(arctg^2\frac{1}{x})'=2arctg\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot(-\frac{1}{x^2})=-\frac{2}{x^2+1}arctg\frac{1}{x}$

20. $y=(3-x)tg2x;$

$y'=[(3-x)tg2x]'=(3-x)'tg2x+(3-x)(tg2x)'=(-1)tg2x+(3-x)\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2=$

$=\frac{2(3-x)}{\cos^2 2x}-tg2x$

21. $y=\ln\sqrt{1+x^2};\quad y'=\left(\ln\sqrt{1+x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x=\frac{x}{1+x^2}$

22. $y = arctg\sqrt{x}$; $\quad y' = \left(arctg\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

23. $y = \ln\left(x + \sqrt{4+x^2}\right)$;

$$y' = \left(\ln\left(x + \sqrt{4+x^2}\right)\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{4+x^2}} \cdot \left(x + \sqrt{4+x^2}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{4+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{4+x^2} + x}{\sqrt{4+x^2}\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$$

24. $y = arctg^3(2x-1)$; $y' = \left(arctg^3(2x-1)\right)' = 3arctg^2(2x-1) \cdot \left(arctg(2x-1)\right)' \cdot (2x)' =$

$$= 3arctg^2(2x-1)\frac{1}{1+(2x-1)^2} \cdot 2 = \frac{6arctg^2(2x-1)}{1+(2x-1)^2}$$

25. $y = \ln\left(2x - 3\sqrt{1-4x^2}\right)$;

$$y' = \left[\ln(2x - 3\sqrt{1-4x^2}\ )\right]' = \frac{1}{2x-3\sqrt{1-4x^2}} \cdot \left(2x - 3\sqrt{1-4x^2}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}\left(2 - \frac{3\cdot(-8x)}{2\sqrt{1-4x^2}}\right) = \frac{1}{\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)} \cdot \frac{\sqrt{1-4x^2} + 12x}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-4x^2} + 12x}{\left(2x-3\sqrt{1-4x^2}\right)\sqrt{1-4x^2}}$$

§ 3.1 Исследование функции.

№ 1. Исселедовать средствами диффренциального исчисления функцию $y = F(x)$, построит их график.

$$F(x) = x^3 - 2{,}5x^2 - 2x + 1{,}5$$

1. Так, как данная функция линейная то область определения данной функции будет

$$R = \left]-\infty; \infty\right[$$

2. Данная функция не определенна на четность и нечетность

$$f(-x) \neq -f(x) \qquad\qquad f(-x) \neq f(x)$$

3. Функция не имеет точек разрыва. Функция не периодическая.

4. График функции не имеет асимптот.

$$y = \kappa x + b; \qquad k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty; \qquad b = \infty.$$

5. Находим точки пересечения с осями координат.

$$при \quad x = 0 \quad y = 1{,}5$$

$$при \quad y = 0 \qquad \begin{gathered} x^3 - 2{,}5x^2 - 2x + 1{,}5 = 0 \\ (x - 0{,}5)(x^2 - 2x - 3) = 0 \\ x_1 = 0, \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x_{2,3} = \frac{2 \pm 4}{2}; \quad x_2 = 3; \; x_3 = -1; \end{gathered}$$

Точки пересечения с осиями координат:

$$M_1(0;1{,}5); \; M_2(-1;0); \; M_3(0;0); \quad M_4(3;0)$$

6. Находим критические точки функции

$$F'(x) = 0 \qquad F'(x) = 3x^2 - 5x - 2$$

$3x^2 - 5x - 2 = 0$ $\qquad x \in \left]-\infty;\ -\frac{1}{3}\right[$ $\qquad f'(x) < 0$ – *функция возрастает*

$D = 25 + 24 = 49$ $\qquad x \in \left]-\frac{1}{3}:\ 2\right[$ $\qquad f'(x) > 0$ – *функция убывает*

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{6}$ $\qquad x \in]2:\ +\infty[$ $\qquad f'(x) < 0$ – *функция возрастает*

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -\frac{1}{3}$

$M_5\left(-\frac{1}{3};\ 1{,}9\right)$ – *максимум функцию*;

$M_6(2;\ -5{,}5)$ – *минимум функцию*;

7. Находим точки перегиба функцию

$F''(x) = 0 \qquad F''(x) = 6x - 5$

$6x - 5 = 0$

$6x = 5$

$x = 0{,}8$

$x \in]-\infty;\ 0{,}8[\qquad f''(x) < 0 \qquad$ *график выпукла*;

$x \in]0{,}8;\ +\infty[\qquad f''(x) > 0 \qquad$ *график вогнута*;

Точка перегиба $M_7(0{,}8;\ -1{,}19)$

№ 2. Исселедовать средствами диффренциального исчисления функцию $y = F(x)$, построит их график.

$$F(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 - 14x^2 + 49x - 36\right)$$

1. Область определения $]-\infty : +\infty[$
2. Функция не определена на четность и нечетность

$$f(-x) \neq -f(x) \quad \text{и} \quad f(-x) = f(x)$$

3. Функция не имеет точек разрыва. Функция не периодическая.
4. График функции не имеет асимптот

$$y = kx + b; \qquad k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty; \qquad b = \infty$$

5. Находим нули функции

при $x = 0 \qquad y = -12$

при $y=0$ $\frac{1}{3}\left(x^3-14x^2+49x-36\right)=0$

$$x^3-14x^2+49x-36=0$$
$$(x-1)\left(x^2-13x+36\right)=0$$
$$x^2-13x+36=0$$
$$x_1=1;\ \ x_2=4;\ \ x_3=9.$$

Точки пересечения с осями координат $M_1(1;0)$; $M_2(4;0)$; $M_3(9;0)$; $M_4(0;-12)$

3. Находим критические точки функции

$F'(x)=0$ $\qquad F'(x)=\frac{1}{3}\left(3x^2-28x+49\right)$

$$\frac{1}{3}\left(3x^2-28x+49\right)=0$$
$$3x^2-28x+49=0$$
$$x_{1,2}=\frac{28\pm14}{6}$$
$$x_1=\frac{7}{3};\quad x_2=7$$

$x\in\left]-\infty;\ \frac{7}{3}\right[$ $\qquad f'(x)>0-$*функция возрастает*

$x\in\left]\frac{7}{3};\ 7\right[$ $\qquad f'(x)<0-$*функция убывает*

$x\in\left]7;\ +\infty\right[$ $\qquad f'(x)>0-$*функция возрастает*

$M_5\left(\frac{7}{3};\ 14\frac{22}{27}\right)-$*точка максимум функции*

$M_6(7;\ -12)-$*точка минимум функции*

Находим точки перегиба функции

$F''(x)=0$ $\qquad F''(x)=\frac{1}{3}(6x-28)$

$$\frac{1}{3}(6x-28)=0$$
$$6x-28=0$$
$$6x=28$$
$$x=\frac{14}{3}$$
$$x=4\frac{2}{3}$$

$x \in \left]-\infty;\ 4\frac{2}{3}\right[\qquad f''(x) < 0 \qquad \textit{график выпукла;}$

$x \in \left]4\frac{2}{3};\ +\infty\right[\qquad f''(x) > 0 \qquad \textit{график вогнута;}$

Точки перегиба $M_7\left(4\frac{2}{3};\ -10\frac{16}{27}\right)$

№ 3. Исселедовать средствами диффренциального исчисления функцию $y = F(x)$, построит их график.

$$F(x) = x^3 - 9{,}5x^2 + 26x - 17{,}5$$

1. Область определение функции $D \in \left]-\infty;+\infty\right[$

2. Функция не определена на четность и нечетность так, как

$$f(-x) \neq -f(x); \qquad f(-x) \neq f(x)$$

3. Функция не имеет точек разрыва. Функция не периодическая.

4. График функции не имеет асимптот

$$y = kx + b \qquad k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty; \qquad b = \infty$$

9. Находим точки пересечения с осиями координат

$\textit{при} \quad x = 0 \qquad y = -17{,}5.$

$$\textit{при} \quad y = 0; \quad x^3 - 9{,}5x^2 + 26x - 17{,}5 = 0$$

$$(x-1)(x^2 - 8{,}5x + 17{,}5) = 0$$

$$x^2 - 8{,}5x + 17{,}5 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{8{,}5 \pm 1{,}5}{2}$$

$$x_1 = 1; \ x_2 = 3{,}5; \ x_3 = 5$$

Точки пересечения с осиями координат

$$M_1(0;-17{,}5); \ M_2(1;0); \ M_3(3{,}5;0); \ M_4(5;0)$$

10. Находим критечиские точки функции

$F'(x) = 0 \qquad F'(x) = 3x^2 - 18x + 26$

$$3x^2 - 19x + 26 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = 4\frac{1}{3}; \quad x_2 = 2$$

$x \in \left]-\infty;2\right[\quad f'(x) > 0$ *функция возрастает;*

$x \in \left]2;4\frac{1}{3}\right[\quad f'(x) < 0$ *функция убывает;*

$x \in \left]4\frac{1}{3};+\infty\right[\quad f'(x) > 0$ *функция возрастает;*

$M_5(2;\ 4{,}5)$ – *максимум функции*

$M_6\left(4{,}5;\ -1\frac{23}{27}\right)$ – *минимум функции*

7. Находим точки перегиба функции $F''(x) = 0$

$F''(x) = 0; \quad F''(x) = 6x - 18$

$$6x - 18 = 0$$

$$6x = 18$$

$$x = 3$$

$x \in \left]-\infty;3\right[\quad f''(x) < 0$ *график вогнута;*

$x \in \left]3;+\infty\right[\quad f''(x) > 0$ *график выпукла;*

$M_7(3;2)$ – *точка перегиба функции.*

№4. Исследовать средствами диффренциального исчисления функцию $y = F(x)$, построит их график.

$$F(x) = x^3 - 8{,}5x^2 + 20x - 12{,}5$$

1. Область определения функции $D \in \left]\infty;+\infty\right[$;

2. Функция не определена на четность и нечетность,.

3. Функция не имеет точек разрыва. Функция не периодическая.

4. График функций не имеет асимтот.

5. Находим точки пересечения с осиями координат

при $x = 0 \qquad y = -12{,}5.$

$при \quad y=0; \quad x^3-8{,}5x^2+20x-12{,}5=0$

$$(x-1)(x^2-7{,}5x+12{,}5)=0$$

$$x^2-7{,}5x+12{,}5=0$$

$$x_{2,3}=\frac{7{,}5\pm 2{,}5}{2}$$

$$x_1=1; \; x_2=2{,}5; \; x_3=5$$

Точки пересечения с осиями координат

$$M_1(0;-12{,}5); \; M_2(1;0); \; M_3(2{,}5;0) \; M_4(5;0)$$

6. Находим критечиские точки функции

$F'(x)=0 \qquad F'(x)=3x^2-17x+20$

$$3x^2-17x+20=0$$

$$x_{1,2}=\frac{17\pm 7}{6}$$

$$x_1=4; \; x_2=1\frac{2}{3}$$

$x\in \left]-\infty;1\frac{2}{3}\right[\quad f'(x)>0$ *функция возрастает*;

$x\in \left]1\frac{2}{3};\ 4\right[\quad f'(x)<0$ *функция убывает*;

$x\in \left]4;\ +\infty\right[\quad f'(x)>0$ *функция возрастает*;

$M_5\left(1\frac{2}{3};1\frac{23}{27}\right)-$ *максимум функции*

$M_6(4;-4{,}5)-$ *минимум функции*

7. Находим точки перегиба функции $F''(x)=0$

$F''(x)=0; \quad F''(x)=6x-17$

$$6x-17=0$$

$$6x=17$$

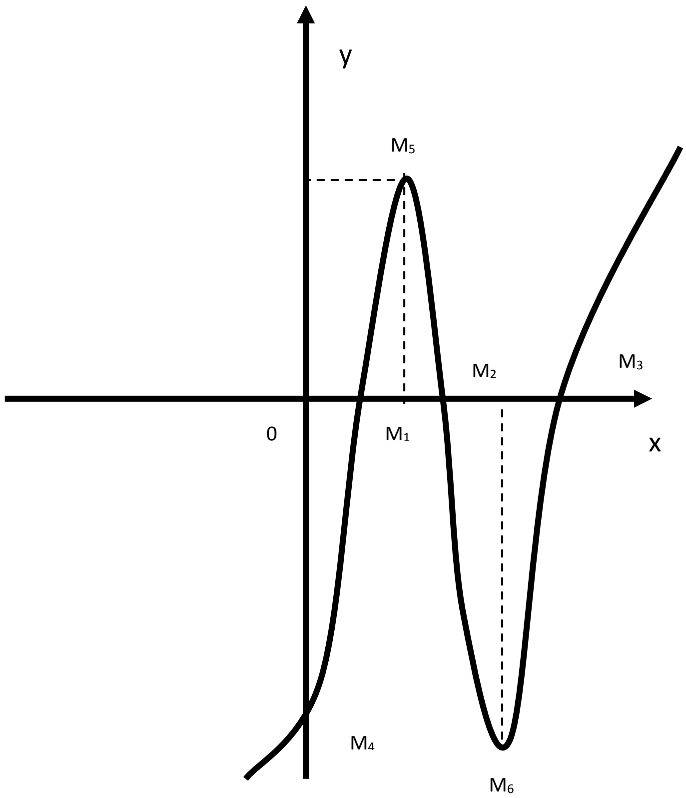
$$x=2\frac{5}{6}$$

$x\in \left]-\infty;2\frac{5}{6}\right[\quad f''(x)<0$ *график вогнута*;

$x\in \left]2\frac{5}{6};+\infty\right[\quad f''(x)>0$ *график выпукла*;

$M_7\left(2\frac{5}{6};-1\frac{35}{108}\right)-$ *точка перегиба функции.*

8.График данной функции:



№5. Исселедовать средствами диффренциального исчисления функцию $y = F(x)$, построит их график.

$$F(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

1. Так, как данная функция линейная то область определения данной функции будет

   $D(y) =]-\infty;+\infty[$

2. Функция не имеет точек разрыва. Функция не периодическая.

3. Функция четная так, как $F(-x) = ((-x)^2 - 1)((-x)^2 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = F(x)$

4. Теперь ищем асимптоты графика данной функции.

Вертикальные асимптоты данной функции не существует т. е. функция неразрывна по оси абсцисс.

$$x = \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left[x^3 - \frac{1}{x}\right] = \infty$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[(x^2 - 1)(x^2 + 1) - k \cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(x^4 - 1 - kx\right) = \infty$$

Значит, не существует и наклонных и горизонтальных асимптот.

5. Находим точки пересечения с осиями координат

$при \quad x = 0 \Rightarrow y = -1.$ $\qquad$ $при \quad y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Точки пересечения с осиями координат $\quad M_1(0;-1);\ M_2(-1;0);\ M_3(1;0)$

6.Находим критечиские точки функции

$F'(x) = 0 \qquad F'(x) = [(x^2-1)(x^2+1)]'$

$4x^3 = 0$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$x \in]-\infty;\ 0[\quad f'(x) < 0\ функция \quad убывает;$

$x \in]0;\ +\infty[\quad f'(x) > 0\ функция \quad возрастает;$

$M_4(\ 0;\ -1\ ) - минимум\ функции$

X	$]-\infty;0[$	0	$]0;+\infty[$
Y'	-	0	+
Y	↘	-1 min	↗

11. Находим точки перегиба функции $F''(x) = 0$

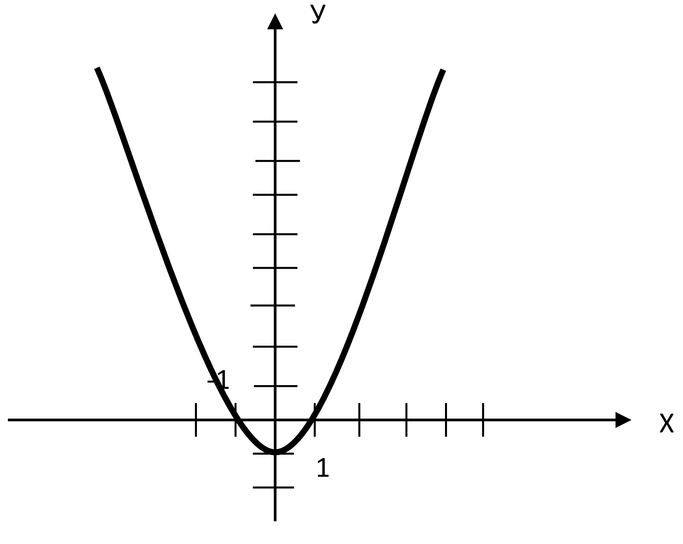
$F''(x) = 0; \quad F''(x) = 12x^2; \quad 12x^2 = 0; \ x_1 = x_2 = 0$

$x \in]-\infty;\ 0[\quad f''(x) < 0\ график\ вогнута;$

$x \in]0; +\infty[\quad f''(x) > 0\ график\ выпукла;$

$M_7(0;-1) - точка\ \ перегиба\ \ функции.$

12. График данной функции:



§4.1. Полный дифференциал функции двух переменных.

$$dz = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}dy$$ ***- формула нахождения полного дифференциала функции.***

№1-10. Найти полный дифференциал функции $z = f(x;y)$.

№1. $z = \sin^3(2x+3y)$

$$dz = 6\sin^2(2x+3y)\cos(2x+3y)dx + 9\sin^2(2x+3y)\cos(2x+3y)\cos(2x+3y)dy;$$

№2. $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

$$dz = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}dy = \frac{xdx}{x^2+y^2} + \frac{ydy}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2};$$

№3. $z = arctg\ \frac{x}{y}$

$$dz = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y}dx + \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{-x}{y^2}dy = \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2};$$

№4. $z = \sqrt{x^2y+3xy^2}$

$$dz = \frac{2xy+y^2}{2\sqrt{x^2y+3xy^2}}dx + \frac{x^2+6xy}{2\sqrt{x^2y+3xy^2}}dy;$$

№5. $z = tg^2(2x-y)$

$$dz = \frac{4tg(2x-y)}{\cos^2(2x-y)}dx - \frac{2tg(2x-y)}{\cos^2(2x-y)}dy = \frac{tg(2x-y)}{\cos^2(2x-y)}(4dx-2dy;$$

№6. $z = 4\ln ctg(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})$

$$dz = \frac{4}{ctg(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})}\cdot\ \frac{-1}{\sin^2(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})}\cdot\frac{1}{4}dx + \frac{4}{ctg(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})}\frac{-1}{\sin^2(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})}\cdot(-\frac{1}{2})dy =$$

$$= \frac{2dy}{\cos(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})\sin(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})} - \frac{dx}{\cos(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})\sin(\frac{x}{4}-\frac{y}{2})} = \frac{2}{\cos\left(\frac{x}{2}-y\right)}(2dy-dx);$$

№7. $z=(\sin x)^{\cos y}$

$$dz=\cos y\sin x^{\cos y-1}\cos xdx+\sin x^{\cos y}\ln\sin x(-\sin y)dy=$$

$$=\cos y(\sin x)^{\cos y-1}\cos x\,dx-\sin x^{\cos y}\sin y\ln\sin x\,dy;$$

№8. $z=\ln(xy^3+x^2y)$

$$dz=\frac{1}{xy^3+x^2y}\cdot(y^3+2xy)dx+\frac{1}{xy^3+x^2y}\cdot(3xy^2+x^2)dy=$$

$$=\frac{1}{xy^3+x^2y}\left[(y^3+2xy)dx+(3xy^2+x^2)\,dy\right];$$

№9. $z=ctg(xy^2+4y)$

$$dz=\frac{-1}{\sin^2(xy^2+4y)}y^2dx-\frac{1}{\sin^2(xy^2+4y)}(2xy+4)\,dy=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2(xy^2+4y)}\left[y^2dx+(2xy+4)dy\right];$$

«Бир аргументтүү функциянын предели», «Туунду жана анын колдонуштары» жана ***«Эки аргументтүү функция»*** бөлүмдөрү боюнча өз алдынча иштердин топтому.

Сборник самостоятельных работ по разделам: ***«Предел, производная и ее применение функции одной переменной» и «Функция двух переменных»***

1-тапшырма
1 – задание

№1-30. Функциянын пределин тапкыла.

№1-30. Найти предел функции.

1. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg10x}{\sqrt{4+x}-2}$ $b)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+5}{3n-6}\right)^{\frac{4n}{3}+5}$ 2. $a)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2+4x-9}{3x^2+x-4}$ $b)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+3}{5n+5}\right)^{4n-7}$

3. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{4+x}-1}$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+3x}{2+3x}\right)^{9x}$ 4. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{\sqrt{9-x}-3}$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x-3}\right)^{3x}$

5. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2\dfrac{x}{4}}$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+4}{4x-5}\right)^{3x+1}$ 6. $a)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-12x+7}{x^2-1}$ $b)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{3n-4}\right)^{\frac{6n+7}{2}}$

7. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{8x}$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right)^{x}$ 8. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{\sin 5x}$ $b)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x-8}{2x^2-x-6}$

9. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^2}$ $b)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{6n+2}{6n+5}\right)^{3n+4}$ 10. $a)\lim\limits_{x\to 0}tg5xctg7x$ $b)\lim\limits_{x\to 0}(1-6x)^{\frac{4x-5}{5x}}$

11. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\sin x}{1-\cos^2 x}$ $b)\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2x\right)^{2ctg^2x}$ 12. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg4x}{5x}$ $b)\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{3n-6}\right)^{\frac{4n+5}{3}}$

13. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{tg5x}$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{x}$ 14. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\alpha x}{tg\beta x}$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

15. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{3}}{x^2}$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{3x}$ 16. $a)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-14x+8}{\sin 5x}$ $b)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$

17. $a)\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5}$ $b)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{5x^2}$ 18. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$ $b)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$

19. $a)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-5}$ $b)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 6x}}{x}$ 20. $a)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x^2+26x-8}{2x^2+x-28}$ $b)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

21. $a)\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2+x^3}$ $b)\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$ 22. $a)\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5-3x}{6x-2}\right)^x$

23. $a)\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{1-\cos x}$ $b)\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5-x^2}-2}{1-x}$ 24. $a)\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos5x-\cos x}{x^2}$ $b)\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$

25. $a)\lim\limits_{x\to2}\frac{4x^2-7x-2}{2x^2-x-6}$ $b)\lim\limits_{x\to0}\frac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$ 26. $a)\lim\limits_{x\to4}\frac{2x^2-9x+4}{3x^2-13x+4}$ $b)\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos6x}{1-\cos2x}$

27. $a)\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-5x+2}{2x^2+3x-5}$ $b)\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{10-x^2}-1}{3-x}$ 28. $a)\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+2}$

29. $a)\lim\limits_{x\to0}xctg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-2}{4x-1}\right)^{4x}$ 30. $a)\lim\limits_{x\to0}tg\alpha xctg\beta x$ $b)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{2x}$

2-тапшырма
2 – задание

№1-30. Берилген функциялардын туундуларын тапкыла.

№1-30. Найти производные заданных функций.

1. $a)$ $y=\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ $b)\,y=arctg[\ln(ax+b)]$ $c)\,y=3^{\sin5x}$ $d)\,y^2-2xy+\sqrt{x}=0$

2. $a)$ $y=arctg\frac{1+x}{1-x}$ $b)\,y=\ln\frac{\sin x+x^2}{1-x^2}$ $c)\,y=3^{\sqrt{x}}$ $d)\,2^x+2^y=2^{x+y}$

3. $a)$ $y=\frac{x\sin x}{1-tgx}$ $b)\,y=\ln\arcsin\sqrt{1+x}$ $c)\,y=3^{arctgx}$ $d)\,y^3\sin x=b^2\cos3x$

4. $a)$ $y=acr\sin\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}$ $b)\,y=arctg^5\left[x+\sqrt{\sin x}\right]$ $c)\,y=\ln^2\left(a^{\sqrt{x}}\right)$ $d)\,x^3y-\sin^2x\cos^4x=5$

5. $a)$ $y=\frac{ctg5x}{\sin2x}$ $b)\,y=arctg\frac{\sqrt{x}}{1-x}$ $c)\,y=3^{\sin\ln x}$ $d)\sin^2y\cos x-\cos y\sin\sqrt{x}=0$

6. $a)$ $y=\frac{x}{1-\cos x}$ $b)\,y=\sqrt[4]{\ln\sin\frac{x+3}{4}}$ $c)\,y=e^{\sqrt{\ln x}}$ $d)\,x^4+y^4=x^2y^2$

7. $a)$ $y=\frac{\sqrt{3}+x^3}{1+\sqrt[3]{x}}$ $b)\,y=\ln\frac{1+\cos x}{tgx}$ $c)\,y=acr\sin3^{\sqrt{5x}}$ $d)\,y^2x+\cos y\ln x=5$

8. $a)$ $y=\sin^3(\cos x)$ $b)\,y=\arccos\sqrt{x-e^x}$ $c)\,y=\ln^2\frac{1+x^2}{1-x^2}$ $d)\,x^2y^2+6y(x+y)-\sqrt[3]{xy}=5$

9. $a)\quad y = tg\dfrac{1+x}{1-x}\quad b)\, y = \ln\sin\sqrt{x}\quad c)\, y = 5^{\sqrt{x}\cos x}\quad d)\,\sqrt{y}x + x^2\cos y + \sin xy = 0$

10. $a)\quad y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\quad b)\, y = x^3\arccos^2\sqrt{1-x}\quad c)\, y = x^a a^x\quad d)\,\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

11. $a)\quad y = 2\cos^3(1+x^2)\quad b)\, y = arctg[\ln(x+1)]\quad c)\, y = 3^{\cos 5x}\quad d)\begin{cases} x = 4\sin 5t \\ y = \cos 5t \end{cases}$

12. $a)\ y = 10\ln(x^2 + \sin x) + 9^{\sqrt{x}}\quad b)\, y = x^{15}arctg\sqrt{x}\quad c)\, y = \dfrac{e^{3x}}{\sin 5x}\quad d)\begin{cases} y = 6^t - 4 \\ x = 2e^{3t} + 1 \end{cases}$

13. $a)\quad y = \left(8x^{\frac{1}{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 9\right)^6\quad b)\, y = xe^{2x}\quad c)\, y = 3^{\sin 5x}\quad d)\, x^2 - 2y + \sqrt{x} = 0$

14. $a)\quad y = \cos\ln x - \sin^3 x - 2\quad b)\ \ y = \ln\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x}}\quad c)\ \ y = e^{2x} + \cos 3x\ \ d)\ \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$

24. $a)\quad y = \dfrac{2x+4}{\sqrt{2x+5}}\quad b)\, y = arctg\sqrt{4x-1}\quad c)\, y = 2^{\cos 3x}\quad d)\, x^2 + y^2 - 4xy = 0$

16. $a)\quad y = 4\arccos 2x - 2\sin x\quad b)\, y = \dfrac{\ln^2 8x}{tg 5x}\quad c)\, y = \left(20\sqrt[3]{x} - \dfrac{x}{2} + 6\right)^7\quad d)\, x^2 + y^2 - 5 = 0$

17. $a)\quad y = \left(9\sqrt{x} + \dfrac{5}{x} - 2\right)^6\quad b)\, y = tg 6x\sqrt{arctgx}\quad c)\, y = \dfrac{\arcsin 5x}{e^{2x}}\quad d)\, x^2 + \sin y = 0$

18. $a)\quad y = \dfrac{\sqrt{x+x}}{x-\sqrt{x}}\quad b)\, y = \arcsin^3\sqrt[4]{x}\quad c)\, y = a^{tg^4 x}\quad d)\, xy^3 - 3xy + yx^4 = 0$

19. $a)\quad y = \dfrac{x - \sqrt[8]{x}}{1+\sqrt{x}}\quad b)\, y = arctg\sqrt{x - x^2}\quad c)\, y = 2^{\sin x}\sin^4 5x\quad d)\sin(xy) + \cos(x-y) = \sqrt{xy}$

20. $a)\quad y = \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}\quad b)\, y = \cos^2\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}\quad c)\, y = \ln^4 tg 2x\quad d)\, x^y = y^x$

21. $a)\quad y = \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\quad b)\, y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\quad c)\, y = a^x x^2\quad d)\, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

22. $a)\quad y = \dfrac{\sqrt{x+5} - x^5}{x^5}\quad b)\, y = \arcsin\left(\ln\sqrt{x}\right)\quad c)\, y = e^{\frac{\sin x}{x}}\quad d)\, x\ln y - \cos y\ln x = 1$

23. $a)\quad y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - x}{1-\sqrt{x}}\quad b)\, y = arctg^3(2x-1)\quad c)\, y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right)\quad d)\, xy^2 + x^2 y = 2$

24. $a)\quad y=\dfrac{2x+4}{\sqrt{2x+5}}$ $\quad b)\, y=arctg\sqrt{4x-1}$ $\quad c)\, y=2^{\cos 3x}$ $\quad d)\, x^2+y^2-4xy=0$

25. $a)\quad y=\ln acr\sin\sqrt{x}$ $\quad b)\, y=\sqrt{\sin 2x+\cos 3x}$ $\quad c)\, y=e^{\sin x^2}$ $\quad d)\, xy+\sin y=0$

26. $a)\quad y=\dfrac{e^x\cos x}{\sin x^2}$ $\quad b)\, y=\ln^2\cos\sqrt{4x-1}$ $\quad c)\, y=2^{tg\frac{1}{x}}$ $\quad d)\, e^y+xy=2$

27. $a)\quad y=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{5^x}$ $\quad b)\, y=arctg\ln\sqrt{x^2+4}$ $\quad c)\, y=e^{arctg\sqrt{x+4}}$ $\quad d)\ln y-2x=0$

28. $a)\quad y=\dfrac{tg2x\arcsin 4x}{\ln 5x}$ $\quad b)\, y=\ln\cos x+tg8x-5$ $\quad c)\, y=5^{\cos 2x}$ $\quad d)\, x^3+y^3-3xy=0$

29. $a)\quad y=\ln x+x^3-1$ $\quad b)\ \ y=\sqrt[4]{\ln\sin\sqrt{x}}$ $\quad c)\ \ y=3^{\ln 5x}$ $\quad d)\ \begin{cases} x=2\sin 3t+1 \\ y=\cos 3t-2 \end{cases}$

30. $a)\quad y=\dfrac{x}{1-\sqrt{\arcsin x}}$ $\quad b)\ \ y=\ln\left(x^2+5\right)$ $\quad c)\ \ x^3+\ln y=2$ $\quad d)\ \begin{cases} x=t^3+4 \\ y=\sqrt{t-2} \end{cases}$

3-*тапшырма*
3 - задание

№1-30. Дифференциалдык эсептөөлөрдүн жардамы менен $y=f(x)$ ***функциясын изилдегиле жана анын графигин тургузгула.***

№1-30. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ ***и построит ее график.***

1. $y=\dfrac{x^4}{2}-4x^2+10$ $\quad$ 2. $y=9x+3x^2-x^3$ $\quad$ 3. $y=x^3+4x^2+4x$ $\quad$ 4. $y=\dfrac{x}{5}-2x^2+5$

5. $y=x^2(x-2)^2$ $\quad$ 6. $y=(x+1)^2(x+4)$ $\quad$ 7. $y=x^3+8x^2+16x$ $\quad$ 8. $y=(x+1)^2(x-2)^2$

9. $y=x^3(2-x)^3$ $\quad$ 10. $y=4x^2-x^2-x^4-3$ $\quad$ 11. $y=x^3+\dfrac{x^4}{4}$ $\quad$ 12. $y=x^3-3x^2-x+3$

13. $y=4x-\dfrac{x^3}{3}$ $\quad$ 14. $y=x^4-8x^2+16$ $\quad$ 15. $y=x^3-6x^2+9x$ $\quad$ 16. $y=2x^3-6x^2+12x-7$

17. $y=2x^2-\dfrac{x^4}{4}$ $\quad$ 18. $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x$ $\quad$ 19. $y=-x^3+3x+2$ $\quad$ 20. $y=2-3x+x^3$

21. $y=x^2-5x+6$ $\quad$ 22. $y=x^3+x^2-6$ $\quad$ 23. $y=\dfrac{x^5}{5}+x^2-6$ $\quad$ 24. $y=5x^2-6x-7$

25. $y=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)$ $\quad$ 26. $y=x^2(x-1)$ $\quad$ 27. $y=x^3\left(x^2-5\right)$ $\quad$ 28. $y=(x-1)\left(x^2+1\right)$

29. $y = xe^x$ 30. $y = x\ln x$

4-тапшырма
4 - задание

№1-30. $z = f(x;y)$ ***функциясынын биринчи, экинчи тартиптеги жекече туундуларын жана толук дифференциялдарын тапкыла.***

№1-30. Найти частные производные первого, второго порядка и полный дифференциал функции $z = f(x;y)$**.**

1. $f(x;y) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + \sqrt{xy}\right)$ 2. $f(x;y) = \sqrt{\sin\left(xy + \sqrt{xy}\right)}$ 3. $f(x;y) = \sqrt{xy}e^{x^2+y^2}$

4. $f(x;y) = \sin^3\left(xy + x^2\sqrt{y}\right)$ 5. $f(x;y) = x\ln\left(1 + \sqrt{x}\sin y\right)$ 6. $f(x;y) = tg^2\left(xy^2\right)$

7. $f(x;y) = \sin\left(2x^3 - 3xy + y^4\right)$ 8. $f(x;y) = arctg\left(x^2 + 3xy + y^2\right)$ 9. $f(x;y) = \sqrt{4x + 8xy - 9y^2}$

10. $f(x;y) = tg^2\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ 11. $f(x;y) = \frac{2x - 3y}{4x - 7y}$ 12. $f(x;y) = \frac{1}{2\left(x^2 + y^2\right)}$

13. $f(x;y) = xy^2 - x^2y$ 14. $f(x;y) = x\sin^2 y$ 15. $f(x;y) = \ln(x - y)$ 16. $f(x;y) = \frac{x^3 - y^2}{x + y}$

17. $f(x;y) = e^{xy} + xye^y$ 18. $f(x;y) = \sin^4\left(x^2 + y^2\right)$ 19. $f(x;y) = arctg\left(x + \sqrt{y}\right)$

20. $f(x;y) = \ln arctg(x + y)$ 21. $f(x;y) = y^2\ln\left(x + \sqrt{y}\right)$ 22. $f(x;y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

23. $f(x;y) = x^2\cos 2y$ 24. $f(x;y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ 25. $f(x;y) = \ln\cos\frac{x}{y}$

26. $f(x;y) = a^{x+y} - ye^x$ 27. $f(x;y) = 5^{\sqrt{x}}\ln yx$ 28. $f(x;y) = arctg\frac{y}{1 + x^2}$

29. $f(x;y) = \cos\frac{y}{x}\ln\left(x^2 + \sqrt{xy}\right)$ 30. $f(x;y) = e^{3x^2 + xy^2 - xy}\sqrt{\sin\left(xy + \sqrt{xy}\right)}$

5-тапшырма
5 - задание

№1-30. $z = f(x;y)$ ***функциясын экстремумга изилдегиле жана анын экстремалдык маанисин тапкыла.***

№1-30. Исследовать на экстремум функцию $z = f(x;y)$***. Найти***

экстримальное значение функции.

1. $z = x^2 + 4xy - y^2 - 6x - 2y$ 2. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x - 2y + 3$ 3. $z = 4y - 4x - x^2 - y^2$

4. $z = x^2 + y^2 - 8y - 2$ 5. $z = x^2 + xy + 2y^2 - x + y$ 6. $z = -4x^2 - y^2 - 8x + 5y + 3$

7. $z = 6xy + yx^2 + 6xy$ 8. $z = x^3 + xy^2 + 6xy$ 9. $z = 2x^4 + y^4 + 3$ 10. $z = x^2 + 3y^2 + 4x + 5$

11. $z = 6x^2 - y^2 - 4xy + 5$ 12. $z = -x^2 - xy - y^2 + 6x + 3y$ 13. $z = 2xy - 6x - 2y + 5$

14. $z = 8x^3 + y^3 + 6xy - 1$ 15. $z = 1 + (x-2)^6 + y^4$ 16. $z = -x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 6y$

17. $z = -x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y + 3$ 18. $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5$ 19. $z = xy - 2x^2 - y^2 + 10x + y - 8$

20. $z = x^2 + 3xy + 3y^2 - 2x - 6y + 1$ 21. $z = 3xy - 4x^2 - y^2 - 6x + 4y - 1$

22. $z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + 7x - 4y + 5$ 23. $z = 3xy - 3x^2 - y^2 + 9x - 6y - 4$

24. $z = x^2 + y^2 + 3xy - 4x - y + 1$ 25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 2$

26. $z = -x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 6y$ 27. $z = -x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y + 3$

28. $z = 6x^3 + 2y^3 + 4xy + 1$ 29. $z = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6y - 2x + 1$ 30. $z = x^2 + y^2 + 3xy - 4x - y + 1$

Математик эмес адистиктердин студенттери үчүн «Бир аргументтүү функциянын предели, туундусу жана анын колдонуштары» жана ***«Эки аргументтүү функция»*** бөлүмдөрү боюнча өз алдынча иштердин топтому.

Сборник самостоятельных работ ***для студентов не математических специальностей*** по разделам: ***«Предел, производное и ее применение функции одного аргумента» и «Функция двух переменных»***

1-тапшырма
1 – задание

№1-25. Берилген функциялардын аныкталуу областтарын тапкыла.

№1-25. Найти область определения функций.

1. $y=\dfrac{3+x}{x^2+4x+3}+\log_2(x-2)$ 2. $y=\dfrac{5x+1}{x-4}+\ln(3x-2)$

3. $y=\dfrac{6x+5}{x^2-3x+2}+\log_3(4x+3)$ 4. $y=\dfrac{7x-1}{x^2+5x+4}+\sqrt{9-x^2}$

5. $y=\sqrt{3x-2}+\log_5(3x+5)$ 6. $y=\dfrac{x+6}{x^2-4x-5}+\sqrt{5x+9}$

7. $y=\arccos\dfrac{2x-3}{5}$ 8. $y=\sqrt{x^2-16}+\log_3(x-3)$

9. $y=\sqrt{3-x}+\lg(x+5)$ 10. $y=\arcsin(1-2x)$

11. $y=\dfrac{1}{x^2-6x+5}+\sqrt{x^2+3x-10}$ 12. $y=\sqrt{3-2x}+\log_3(2x-1)$

13. $y=\sqrt{x^2-5x}+\ln(x+2)$ 14. $y=\sqrt{x^2-6x}+\lg(3-x)$

15. $y=\dfrac{4x+3}{x^2+6x}+\arcsin(x+6)$ 16. $y=\dfrac{3x+1}{x^2-25}+\sqrt{x^2+2x}$

17. $y=\sqrt{x^2-9}+\log_3(4x+1)$ 18. $y=\dfrac{x+5}{x^2-6x+5}+\ln(3x-4)$

19. $y=\dfrac{3-4x}{x^2-8x-9}+\lg(4-3x)$ 20. $y=\dfrac{5x+1}{x^2-2x-3}+\arccos(x-3)$

21. $y=\sqrt{4+x^2}+\arcsin(x+2)$ 22. $y=\sqrt{x^2-25}+\log_3(2x+3)$

23. $y=\sqrt{x^2-4x-5}-\log_3(3-x)$ 24. $y=\dfrac{4x+5}{x^2-9x}+\arcsin(x-2)$

25. $y=\dfrac{3x+7}{x^2+3x^2+2x}+\sqrt{36-x^2}$

2-тапшырма
2 – задание

№1-25. **Пределдерди эсептегиле.**

№1-25. **Вычислите пределы.**

1. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-3x^4+7x-1}{3-2x^2+3x^5}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}$;

2. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x+1}{3x^3+2x^2+4}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-x-2}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$;

3. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x+10}{4x^3+3x-1}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-5x}{3x^2+x}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^3-4x+3}$;

4. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+5}{3x^2+7x+1}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

5. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4+3x+x^2}{3x^2+4x+1}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{x^3-27}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x-4}-2}$;

6. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+1}{3x^4-7x+5}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{9-x^2}{x^2-4x+3}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{3-x}$;

7. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-1}{x+3x^2}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-5x+4}$;

8. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+8}{3x^2+5x+6}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to3}\dfrac{9-x^2}{x^2-x+6}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}$;

9. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^3+1}{1+3x^2+5x^4}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}{x^2-2x-8}$;

10. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x+3}{3+5x+2x^2}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2-x}{x^2-4}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2-6x-16}$;

11. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3-3x+1}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

12. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x+5}{3x+5x^3}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to4}\dfrac{16-x^2}{x^3-64}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{3-x}$;

13. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x+2}{2+3x-2x^2}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5-x}{x^3-125}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}}{x^2-3x-4}$;

14. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+2x+3}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-1}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x^2-4x+3}$;

15. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-x^4-x^2-1}{x^2-x^5+1}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-8x-2}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$;

16. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x^3+5x+4}{2+4x+5x^3-3x^2}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-8x-12}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}-2}$;

17. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-8-x^5}{x^4+2x-1}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^4-16}{x^2-3x-4}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$;

18. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+6x-9}{x+x^2-3x^3}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x-10}{x^4-25}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+x-2}$;

19. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^7}{1+3x+x^7}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{x^2-4x-12}$;

20. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^6}{6x^6+1}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+2}{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$;

21. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7-3x-5}{1-x}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{9-x^2}{x^2-x-6}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x+7}-4}{x-3}$;

22. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x-4}{8-4x^2+10x}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{25-x^2}{x^2+8x+15}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1-\sqrt{x-6}}{x^2-49}$;

23. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{0{,}5x-3x+4}{0{,}1x-8x^3-x^4}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{16-x^2}{x^2+9x+20}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{x+9}-3}$;

24. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^8-13x-9}{19x-16x^2-21}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x}{\sqrt{x+16}-4}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2+2x+8}$;

25. $a)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^9-x^7-9}{x^{10}-5x+1}$; $\quad б)\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{-x^2-x+2}$; $\quad b)\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{x^2-16}$;

3-тапшырма
3 – задание

№1-25. **Берилген функциялардын туундуларын тапкыла.**

№1-25. **Найти производные данных функции.**

1. а) $y = 3x + \frac{4}{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2}$ б) $y = (x^2 + 4)arctg\,2x$

   в) $y = \frac{\sin x}{x - 3}$ г) $y = (\ln x - \cos 4x)^2$

2. а) $y = 5x^2 - \frac{1}{x} + 2\sqrt[4]{x}$ б) $y = (x + 3)\arcsin x$

   в) $y = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$ г) $y = (e^{4x} - \sin 4x)^3$

3. а) $y = 5x^3 - \frac{4}{x^3} + 4\sqrt[4]{x^3}$ б) $y = e^{3x}(x^2 - 5)$

   в) $y = \frac{tgx}{x^2 - 2x}$ г) $y = (\ln \sin x - x)^4$

4. а) $y = x^4 + \frac{1}{3x^2} - 6\sqrt{x} + 3$ б) $y = (5x^2 + 3)tgx$

   в) $y = \frac{\sin x}{x + \cos x}$ г) $y = (x^3 - \ln x)^4$

5. а) $y = 4x^3 - \frac{3}{2x^7} + 4\sqrt[3]{x}$ б) $y = (x + e^x)\arccos x$

   в) $y = \frac{\cos x}{x - \sin x}$ г) $y = \ln ctg 3x$

6. а) $y = 5x^6 - \frac{4}{3x^3} + 8\sqrt[4]{x^3}$ б) $y = x^3 arctgx$

   в) $y = \frac{x + 3}{\ln x}$ г) $y = (4x^3 + e^{3x})^5$

7. а) $y = 4x^3 - \frac{6}{5x^3}$ б) $y = (x^3 + 2)\ln(x + 3)$

   в) $y = \frac{arctgx}{1 + x^2}$ г) $y = e^{arctgx}$

8. а) $y = 3x^5 - \dfrac{1}{4x^4} + 6\sqrt[6]{x^5}$ б) $y = (x^3 - 3)\cos x$

в) $y = \dfrac{2}{x^2 + 3x + 1}$ г) $y = \sqrt[3]{x^2 + \ln x}$

9. а) $y = 5x^3 - \dfrac{5}{6x^6} + 15\sqrt[5]{x^3}$ б) $y = (1 - x^2)ctgx$

в) $y = \dfrac{e^{2x}}{2x+1}$ г) $y = \ln(x^3 - 5x + 3)$

10. а) $y = 3x^4 - \dfrac{2}{4x^3} + 6\sqrt[3]{x}$ б) $y = 5^x \sin x$

в) $y = \dfrac{\arccos x}{x^3 - 1}$ г) $y = \sqrt{x^3 - \sin 3x}$

11. а) $y = \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{3x^3}$ б) $y = x^2 ctgx$

в) $y = \dfrac{8}{\sqrt[4]{x}} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}$ г) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

12. а) $y = x + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{5x^5}$ б) $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

в) $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ г) $y = \dfrac{\cos x}{1 + 2\sin x}$

13. а) $y = 8x + \dfrac{2}{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} - 1$ б) $y = \arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$

в) $y = \cos^2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ г) $y = x\cos x \ln x$

14. а) $y = 5x^2 - \dfrac{7}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5}$ б) $y = (x^2 - 3x + 1)tgx$

в) $y = \dfrac{\log_2 x}{x^2 - 3x + 8}$ г) $y = (e^x - \sin 5x)^3$

15. а) $y = 9x^2 - \dfrac{4}{5x^5} + \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$ б) $y = \dfrac{\log_4 x}{3x + 2}$

в) $y = \dfrac{tgx}{x^3 - 3x + 2}$ г) $y = \ln tg^3(3x + 2)$

16. а) $y=11x^3+\frac{7}{2x^8}-10\sqrt[5]{x^2}$ б) $y=\left(x^2+3\right)\ln x$

в) $y=\frac{3x^2+4x-1}{tg2x}$ г) $y=\left(\frac{x^2+3}{2x+1}\right)^5$

17. а) $y=10x^7+\frac{5}{x^6}-12\sqrt[12]{x^7}$ б) $y=\left(x-x^3\right)\cdot 2^x$

в) $y=\frac{\ln x}{x^2-5x+9}$ г) $y=\sqrt{x^4-\cos 5x}$

18. а) $y=0{,}4x^5-\frac{1}{7x^7}+9\sqrt[12]{x^5}$ б) $y=3^x\sin x$

в) $y=\frac{x^2+3x-1}{\arcsin x}$ г) $y=\left(x^3+tg3x\right)^5$

19. а) $y=0{,}2x^3+\frac{3}{x^7}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ б) $y=e^x\cos x$

в) $y=\frac{\sin x}{1+tgx}$ г) $y=\ln^4 tg3x$

20. а) $y=0{,}6x^5+\frac{1}{\sqrt{x}}+18\sqrt[9]{x^7}$ б) $y=\left(1-x^2\right)\cos x$

в) $y=\frac{arctgx}{1+x^2}$ г) $y=3^{\cos 5x}$

21. а) $y=3x^8-\frac{5}{x^{11}}+7\sqrt[7]{x^3}$ б) $y=\left(x-2^x\right)\sin x$

в) $y=\frac{x\cdot\ln x}{3x+4}$ г) $y=e^{3x^2+4x+5}$

22. а) $y=4x^9+\frac{8}{x^9}-5\sqrt[10]{x^7}$ б) $y=\frac{3^x}{\arccos x}$

в) $y=\left(x^2+1\right)ctgx$ г) $y=\sqrt[5]{x^4+\log_3 x}$

23. а) $y=7x^3+\frac{4}{3x^5}-3\sqrt[9]{x^4}$ б) $y=\left(x^4+1\right)\ln x$

в) $y=\frac{x^2+3x+2}{\log_3 x}$ г) $y=\log_3 ctg5x$

24. а) $y = 9x^5 - \dfrac{5}{4x^4} + 2\sqrt[8]{x^3}$ б) $y = (3x+2)4^x$

в) $y = \dfrac{tgx}{x - \sin x}$ г) $y = (5x^4 \sin 3x)^5$

25. а) $y = 3x^7 + \dfrac{9}{5x} + \sqrt[4]{x^3}$ б) $y = (x^2+1)e^{5x}$

в) $y = \dfrac{4x}{x+4}$ г) $y = (3^x + tg4x)^4$

4-тапшырма
4 - задание

№1-25. Дифференциалдык эсептөөлөрдүн жардамы менен $y = f(x)$ ***функциясын изилдегиле жана анын графигин тургузгула.***

№1-25. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ ***и построит ее график.***

1. $y = \dfrac{x^4}{2} - 4x^2 + 10$ 2. $y = 9x + 3x^2 - x^3$ 3. $y = x^3 + 4x^2 + 4x$ 4. $y = \dfrac{x}{5} - 2x^2 + 5$

5. $y = x^2(x-2)^2$ 6. $y = (x+1)^2(x+4)$ 7. $y = x^3 + 8x^2 + 16x$ 8. $y = (x+1)^2(x-2)^2$

9. $y = x^3(2-x)^3$ 10. $y = 4x^2 - x^2 - x^4 - 3$ 11. $y = x^3 + \dfrac{x^4}{4}$ 12. $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$

13. $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$ 14. $y = x^4 - 8x^2 + 16$ 15. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ 16. $y = 2x^3 - 6x^2 + 12x - 7$

17. $y = 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$ 18. $y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ 19. $y = -x^3 + 3x + 2$ 20. $y = 2 - 3x + x^3$

21. $y = x^2 - 5x + 6$ 22. $y = x^3 + x^2 - 6$ 23. $y = \dfrac{x^5}{5} + x^2 - 6$ 24. $y = 5x^2 - 6x - 7$

25. $y = (x^2-1)(x^2+1)$

5-тапшырма
5 - задание

№ 1-25. $z = f(x; y)$ ***функциясынын толук дифференциялын жана экстремумун тапкыла.***

№ 1-25. Найти полный дифференциал и экстремум функции $z = f(x;y)$.

1. $z = 3x^2 - xy + x + y;$ 2. $z = x^2 - 4xy - y^2 - 10x - 2y;$ 3. $z = 6y - 8x - x^2 - y^2;$

4. $z = x^2 - y^2 - 10y - 2;$ 5. $z = x^2 + xy + 2y^2 - 4x + y;$ 6. $z = x^2 - 4y^2 - 8x + 16y - 2;$

7. $z = yx^2 + 3xy - y^3;$ 8. $z = x^3 - xy^2 - 6xy;$ 9. $z = 2x^4 - y^4 - 8x - 4y - 3;$

10. $z = x^2 - 3y^2 + 4x + 7;$ 11. $z = 5y^3 + y^2 - y - 9;$ 12. $z = -x^2 - y^2 + xy + 8x + 2y;$

13. $z = x^2 + 2xy - 6x - 2y + 3;$ 14. $z = 8x^3 + y^3 - xy + 5;$ 15. $z = 1 + (x-3)^4 + y^6;$

16. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20;$ 17. $z = x^2 - 8y^2 - 6xy + 5;$ 18. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2;$

19. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2;$ 20. $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 + 1;$ 21. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 8;$

22. $z = 4x - 4y - x^2 - y^2;$ 23. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1;$

Колдонулган адабияттар:

1. Борубаев А., Шабыкеев Б. ж.б., «Математикалык анализ» 1-2 бөлүм. –Б: 2009.
2. Усубакунов Р. «Дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөр»
3. Исаков А. «Аналитикалык геометрия», – Ф: 1986.
4. Саттаров Ж. «Алгебра жана сандар теориясы» I-II бөлүм. – Ош: 1991.
5. Сулайманов Ж. «Жогорку математика сабагынан лекциялар жайнагы» –Б:1993.
6. Матиева Г. «Аналитикалык геометрия», – Ош:1994.
7. Толбаев Б. «Тегиздиктеги аналитикалык геометрия боюнча усулдук колдонмо» – Сүлүктү: 2003.
8. Соловников А. «Математика в экономике» – Москва: «Фин и стат» 2000.
9. Бекельман И.Я. «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» – Москва: «Просвещение» 1986.
10. Баврин И.И. «Высшая математика» – Москва: «Просвещение» 1980.
11. Романко В.К. «Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления» – Москва: Физматлит 2001.
12. Красс М.С. «Математика для экономистов» – С-П: «Питер» 2007.
13. Смирнов В.И. «Курс высшей математики» т.1-4 .–Москва: «Наука» 1974.
14. Пискунов Н.С., «Дифференциальное и интегральное исчисления» т.I,II, –Москва: «Наука» 1965.
15. Фихтенгольц Г. «Основы математического анализа», т.I,II,III, –М: «Наука» 1968.
16. Толубаев Ж.О., Кудаяров К.С., «Математика боюнча мисалдар жана маселелер жыйнагы» –Бишкек: «Турар» 2005.
17. Т.Б.Борубаев, Ж.О.Толубаев «Сборник задач по высшей математике» –Жалал-Абад: 1995.
18. Берман Г.Н., «Сборник задач по курсу математического анализа», –М: «Наука» 1964.
19. Демидович Б.П. «Сборник задач и упражнений по математическому анализу» –Москва: Госиздат, 1964.
20. Гмурман В.Е. «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике» – Москва: «Высшая школа» 1989.
21. Данко П.Е. Попов А.Т., и.др. «Высшая математика в упражнениях и задачах»1-2 часть –Москва: «Высшая школа»1999.
22. Минорский В., «Сборник задач по высшей математике» – Москва М: «Физ. мат литература» 2002.
23. Садовничий В, «Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре» – Москва: «Логос» 2005.
24. Клетеник Д.В. «Сборник задач по аналитической геометрии» – Москва: «Наука» 1986.
25. Проскуряков В.«Сборник задач по линейной алгебре» – Москва: «Наука» 1970.

М А З М У Н У

Н.О.Холбеков, Ж.О.Толубаев

**ФУНКЦИЯНЫН ПРЕДЕЛИ, ТУУНДУСУ
ЖАНА АНЫН КОЛДОНУШТАРЫ БОЮНЧА
ӨЗ АЛДЫНЧА ИШТЕРДИН
ЖЫЙНАГЫ**

(Өз алдынча иштерди аткарууга усулдук көрсөтмөлөр)

**СБОРНИК
САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПО ПРЕДЕЛУ,
ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЮ**

(Методическое руководство
к выполнению самостоятельных работ)

Нускасы 300 экз. Ченеми 60х84/16. Көлөмү 3.5 басма табак.

“Айат” басмаканасында басылды.
Бишкек ш.Ташкен к., 60